§5.2 Fourier 积分与 Fourier 变换

本节研究非周期函数的 Fourier 展开、Fourier 变换及其有关性质.

5.2.1 实数形式的 Fourier 变换

1. Fourier 变换

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，且是非周期函数. 我们可以作周期为 2ℓ 的函数 $g(x)$，并使它在 $(-\ell,\ell)$ 内等于 $f(x)$，在这之外进行周期为 2ℓ 的延拓. 显然，2ℓ 越大，$g(x)$ 与 $f(x)$ 相等的范围越大. 因此，非周期函数 $f(x)$ 可以说是周期为 2ℓ 的函数 $g(x)$ 当 $2\ell\to\infty$ 时的极限，即

$$f(x)=\lim_{\ell\to\infty}g(x)=\lim_{\ell\to\infty}\left[a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right]\tag{5.2-1}$$

令 $\omega_k = k\omega = k\frac{\pi}{\ell}, k = 0, 1, 2, \cdots, \Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{\pi}{\ell} = \omega$，则

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\omega_k x + b_k \sin\omega_k x) \tag{5.2-2}$$

上式中的 Fourier 系数为

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\delta_k \ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\cos\omega_k\xi \mathrm{d}\xi, \\ b_k = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\sin\omega_k\xi \mathrm{d}\xi. \end{cases} \tag{5.2-3}$$

将(5.2-3)代入(5.2-2)中，并取极限 $\ell \to \infty$，若 $\lim_{\ell\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 有限，

$$\lim_{\ell\to\infty} a_0 = \lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

$$\lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\cos\omega_k\xi \mathrm{d}\xi\right]\cos\omega_k x$$

$$= \lim_{\ell\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\cos\omega_k\xi d\xi\right]\cos\omega_k x\cdot\Delta\omega_k, \qquad \frac{1}{\ell}=\frac{\Delta\omega_k}{\pi}.$$

当 $\ell\to\infty$ 时，$\Delta\omega_k=\frac{\pi}{\ell}=\omega\to 0$，不连续参变量变为连续参变量，对 k 的求和变为对参量 ω 的积分，即

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi d\xi\right]\cos\omega x d\omega.$$

同理，正弦部分的极限为

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi d\xi\right]\sin\omega x d\omega.$$

所以式(5.2-2)的在极限 $\ell\to\infty$ 下的形式为

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega+\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x d\omega, \tag{5.2-4}$$

其中

$$\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi, \\ B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi \mathrm{d}\xi. \end{cases} \tag{5.2-5}$$

(5.2-4)右边的积分称为 Fourier 积分，(5.2-4)称为非周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 积分表达式．(5．2．5)称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换式．

2. Fourier 积分定理—Fourier 变换的存在性

Fourier 积分定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上满足条件：

(1) $f(x)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件，

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积(即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛)，

则 $f(x)$ 可表成 Fourier 积分，且 Fourier 积分值$=[f(x+0)+f(x-0)]/2$．

式(5.2-4)可改写为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\cos[\omega x - \varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega,$$

$$C(\omega) = \left\{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2\right\}^{1/2}, \quad \text{—}f(x) \text{ 的振幅谱},$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}, \quad \text{—}f(x) \text{ 的相位谱}$$

3. 奇函数的 $f(x)$ 的 Fourier 积分—Fourier 正弦积分

跟 Fourier 级数的情形类似，奇函数 $f(x)$ 的 Fourier 积分是 Fourier 积正弦积分，

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega, \tag{5.2-6}$$

上式满足 $f(0) = 0$，$B(\omega)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 正弦变换，

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi\mathrm{d}\xi. \tag{5.2-7}$$

4. 偶函数的 $f(x)$ 的 Fourier 积分—Fourier 余弦积分

同样地，偶函数 $f(x)$ 的 Fourier 积分是 Fourier 积余弦积分，

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x \mathrm{d}\omega, \tag{5.2-8}$$

上式满足 $f'(0) = 0$，$A(\omega)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变换，

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi. \tag{5.2-9}$$

式(5.2-6)～(5.2-9)也可写成对称的形式：

对 Fourier 正弦变换

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x \mathrm{d}\omega, \tag{5.2-10}$$

$$B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin\omega\xi \mathrm{d}\xi. \tag{5.2-11}$$

对 Fourier 余弦变换

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x \mathrm{d}\omega, \tag{5.2-12}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi \mathrm{d}\xi. \tag{5.2-13}$$

例

例 1 矩形函数 rect$x$ 指的是

$$\mathrm{rect}x = \begin{cases} 1, & (|x| < \frac{1}{2}) \\ 0, & (|x| > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

试将矩形脉冲 $f(t) = h\mathrm{rect}(t/2T)$ (如图示)展开为 Fourier 积分.

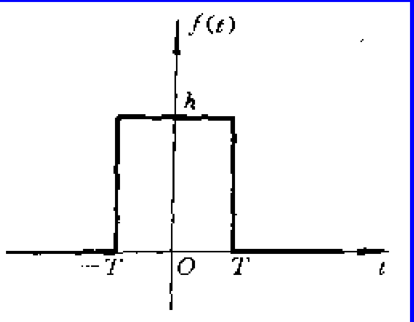

图 5-1

解： $f(x)$ 是偶函数，可按式(5.2-8)展开为 Fourier 积分

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega,$$

Fourier 变换

$$\begin{aligned}A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty h\,\mathrm{rect}(\xi/2T)\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^T h\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{2h}{\pi}\frac{\sin\omega T}{\omega}\end{aligned}$$

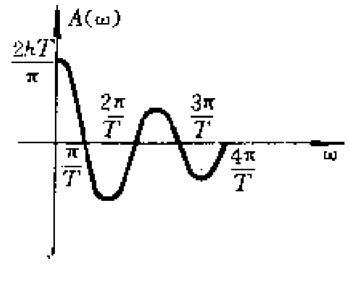

图 5-2

$A(\omega)$ 的图象示于图5-2．这是连续谱．若有形似图5—1的脉冲电波，它便含有一切频率(当然应该除去 n/T 的整数倍频率)，它到达无线电接收机时，不管接收机调谐在哪个频率，都会引起噪音．

例2 由 2N 个(N 是正整数)正弦波组成的有限正弦波列

$$f(t)=\begin{cases} A\sin\omega_0 t, & (|t|<\frac{2N\pi}{\omega_0}) \\ 0\qquad\quad, & (|t|>\frac{2N\pi}{\omega_0}) \end{cases}$$

试将其展开为 Fourier 积分.

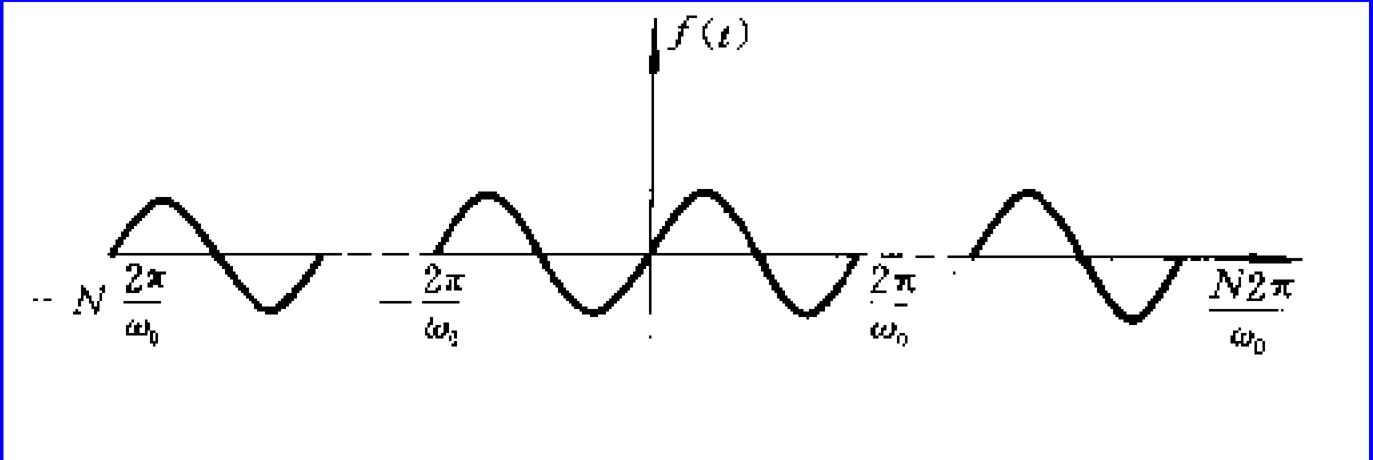

图 5-3

解：$f(t)$ 是奇函数（如图示），可按(5.2-6)和(5.2-7)展开为 Fourier 正弦

积分

$$f(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \mathrm{d}t,$$

其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}
B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \mathrm{d}t &= \frac{2A}{\pi} \int_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin \omega_0 t \sin \omega t \mathrm{d}t \\
&= -\frac{A}{\pi} \int_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}} [\cos(\omega + \omega_0)t - \cos(\omega - \omega_0)t]\mathrm{d}t \\
&= -\frac{A}{\pi} \left[\frac{\sin(\omega + \omega_0)t}{\omega + \omega_0} - \frac{\sin(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} \right] \Bigg|_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}} \\
&= \frac{A}{\pi} \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} N2\pi \right) \left[-\frac{1}{\omega + \omega_0} + \frac{1}{\omega - \omega_0} \right] \\
&= \frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} N2\pi \right).
\end{aligned}$$

这个频谱见图5-4. 在 ω_0 有一尖峰，高度为 $(2N/\omega_0)A_0$，在其两侧相差为 $\omega_0/2N$ 处降为零. 所以，有限长的正弦波列并非单色波(“单色”指的是只有一个单一频率). 大体说来，其所包含的圆频率集中在 ω_0 左右的 $\omega_0/2N$ 范围内，波列越长(N 越大)，圆频率分散的范围 $\omega_0/2N$ 越小.

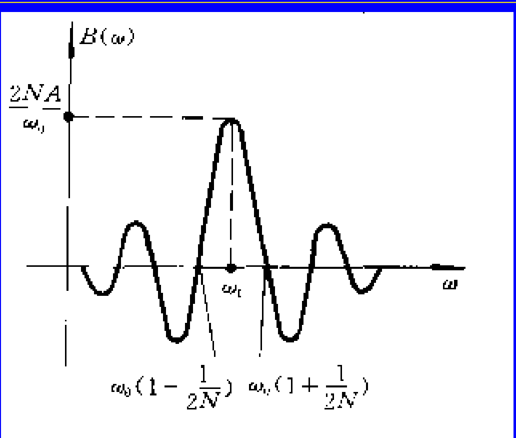

图 5-4

5.2.2 复数形式的 Fourier 积分

上面介绍了实数形式的 Fourier 积分，下面介绍复数形式的 Fourier 积分，它在很多情况下比实数形式的 Fourier 积分更方便.

用 Euler 公式

$$\cos\omega x = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right), \qquad \sin\omega x = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}\right)$$

代入式(5.2-4)中，可将实数形式的 Fourier 积分改写为

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{2}[A(\omega) - \mathrm{i}B(\omega)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega + \int_0^\infty \frac{1}{2}[A(\omega) + \mathrm{i}B(\omega)]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

令

$$C(\omega) = \frac{1}{2}[A(\omega) - \mathrm{i}B(\omega)], \qquad C(-\omega) = \frac{1}{2}[A(\omega) + \mathrm{i}B(\omega)],$$

得

$$f(x) = \int_0^\infty C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega + \int_0^\infty C(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$

合并两个积分后，有

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega, \quad \text{复数形式的 Fourier 积分.} \tag{5.2-14}$$

容易证明，

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\right]^*\mathrm{d}x, \quad \text{复数形式的 Fourier 变换.} \tag{5.2-15}$$

另外，复数形式的 Fourier 积分，可仿照实数形式的 Fourier 积分导出过程，由复数形式的 Fourier 级数导出.

记 $\omega_k = k\omega = k\frac{\pi}{\ell}$ 有复数形式的 Fourier 级数展开式(5.1-13)和(5.1-14)，即

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k x},$$

$$C_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\left[e^{i\omega_k \xi}\right]^* d\xi.$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\left[e^{i\omega_k \xi}\right]^* d\xi\right] e^{i\omega_k x}.$$

取极限 $\ell \to \infty$，得

$$f(x) = \lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)e^{-i\omega_k \xi}d\xi\right] e^{i\omega_k x},$$

记 $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{\ell}{\pi}$，则当 $2\ell \to \infty$ 时，$\Delta\omega \to 0$，

$$f(x) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k\xi}\mathrm{d}\xi\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k x}\Delta\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

即

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega,\quad \text{复数形式的 Fourier 积分,}$$
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi}\right]^*\mathrm{d}\xi,\quad \text{复数形式的 Fourier 变换}$$

复数形式的 Fourier 积分变换式同样可以改写为对称的形式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega, \tag{5.2-16}$$
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\right]^*\mathrm{d}x. \tag{5.2-17}$$

常引入符号简写为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(x)],\qquad f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]. \tag{5.2-18}$$

$f(x)$ 和 $F(\omega)$ 分别称为 Fourier 的原函数和像函数.

例

例 3 求矩形脉冲 $f(t)=h\mathrm{rect}(t/2T)$ 的复数形式的 Fourier 变换.

解：根据式(5.2-15)，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[h\mathrm{rcet}(t/2T)]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h\mathrm{rcet}(t/2T)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{h}{2\pi}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=-\frac{h}{2\pi\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-T}^{T}=\frac{h}{\pi}\frac{\sin\omega T}{\omega}.\end{aligned}$$

定义 sinc 函数，记为 sinc$x$，上面的结论可改写为

$$\mathscr{F}[h\mathrm{rcet}(t/2T)]=\frac{hT}{\pi}\frac{\sin\omega T}{\omega T}=\frac{hT}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{\pi}\omega\right).$$

5.2.3 Fourier 变换的基本性质

1. 导数定理

$$\mathscr{F}[f'(x)] = \mathrm{i}\omega F(\omega). \tag{5.2-19}$$

证明：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f'(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]'\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 Fourier 积分定理，有 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$，所以

$$\mathscr{F}[f'(x)] = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]'\mathrm{d}x = \mathrm{i}\omega F(\omega).$$

2. 积分定理

$$\mathscr{F}\left[\int^{(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega). \tag{5.2-20}$$

证明：记 $\int^{(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 为 $\varphi(x)$，则

$$\varphi'(x) = f(x).$$

对 $\varphi(x)$ 应用导数定理，有

$$\mathscr{F}[\varphi'(x)] = \mathrm{i}\omega\mathscr{F}[\varphi(x)]$$

所以

$$\mathscr{F}\left[\int^{(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[f(x)] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega).$$

上面两个定理说明，原函数的求导和求积分运算，经 Fourier 变换后成为像函数的代数运算．因此，经 Fourier 变换后可以简化问题．

3. 相似性定理

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{5.2-21}$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

作变数代换 $y = ax$，上式变为

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}y}\frac{1}{a}\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}y}\mathrm{d}y.$$

换回原来的变数

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x.$$

上式与式(5.2-150比较，有

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. 延迟定理

$$\mathscr{F}[f(x-x_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}F(\omega). \tag{5.2-22}$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(x-x_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

作变数代换 $y = x - x_0$，**有**

$$\mathscr{F}[f(x-x_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(y+x_0)}\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}F(\omega).$$

5. 位移定理

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}f(x)] = F(\omega-\omega_0). \tag{5.2-23}$$

证明：

$$\mathscr{F}[e^{i\omega_0 x}f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 x}f(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\omega_0)x}dx = F(\omega-\omega_0).$$

6. 卷积定理

若 $\mathscr{F}[f_1(x)] = F_1(\omega), \mathscr{F}[f_2(x)] = F_2(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = 2\pi F_1(\omega)F_2(\omega). \tag{5.2-24}$$

其中，

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$$

称为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积.

证明:

$$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

交换积分顺序

$$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi.$$

将对 x 的积分作改换 $y = x - \xi$，则

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\mathrm{d}y \\
&= 2\pi F_1(\omega)F_2(\omega).
\end{aligned}$$

5.2.4 多重 Fourier 积分*

二维或三维无界空间的非周期函数也可以展为 Fourier 积分，只是这 Fourier 积分是多重的．下面就三维情形具体说明．

首先就自变数 x 将三维空间的非周期函数 $f(x,y,z)$ 展开为 Fourier 积分，其 Fourier 变换为 $F_1(k_1;y;z)$, y,z 作为参数出现在其中；再将 $F_1(k_1;y;z)$ 就 y 展为 Fourier 积分，其 Fourier 变换为 $F_2(k_1;k_2;z)$，其中 z 为参数；最后将 $F_2(k_1;k_2;z)$ 就 z 展为 Fourier 积分，这样，综合三次展开，得到 $f(x,y,z)$ 的三重 Fourier 积分

$$f(x,y,z)=\iiint_{-\infty}^{\infty}F(k_1,k_2,k_3)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}dk_1dk_2dk_3,$$

其中三重 Fourier 变换

$$F(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)e^{-i(k_1x+k-2y+k-3z)}dxdydz.$$

引入矢量 $\vec{r}$ 和 $\vec{k}$，$\vec{r} = x\vec{i}_1 + y\vec{i}_2 + z\vec{i}_3$，可将三重 Fourier 积分及其变换写成较简洁的形式

$$f(\vec{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}dk_1dk_2dk_3, \tag{5.2-25}$$

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]^* dxdydz. \tag{5.2-26}$$

或采用对称的形式

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty} F(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}dk_1dk_2dk_3, \tag{5.2-27}$$

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r})\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]^* dxdydz. \tag{5.2-28}$$

例

例1. 求单个锯齿脉冲 $f(t) = kt\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$，即

$$f(t) = \begin{cases} 0\ , & (t < 0) \\ kt\,, & (0 < t < T) \\ 0\ , & (t > T) \end{cases}$$

的Fourier变换

解：因为 $f(t)$ 是无界空间中的非周期函数，它的周期为 ∞，故可展开为 Fourier 积分，其 Fourier 变换：

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega + \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

其中 Fourier 变换 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 为：

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{T} kt\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k}{\pi\omega^2}\int_0^T \omega t\cos\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)\\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}\Big[\cos\omega t+\omega t\sin\omega t\Big]_0^T\\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}[\cos\omega T+\omega T\sin\omega T-1],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^T kt\sin\omega t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}\Big[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\Big]_0^T\\
&= \frac{k}{\pi\omega^2}[\sin\omega T-\omega T\cos\omega T],
\end{aligned}
$$

复数形式为：

$$
\frac{k}{2\pi\omega}\left[\frac{1}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}-1\right)+\mathrm{i}T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right].
$$

例2. 求 $\mathrm{sinc}\,t=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$ 的 Fourier 变换，试以本题的 Fourier 变换函数跟图 5-1 比较，又以本题的 $\mathrm{sinc}\,t$ 跟图 5-2 比较，比较的结果说明什么问题？

解：因 $\sin\pi t$ 和 πt 是奇函数，所以 $\mathrm{sinc}\,t$ 是偶函数，应展为 Fourier 余弦积分，其余弦 Fourier 变换为

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\xi}\sin\pi\xi\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{\xi}\sin(\omega+\pi)\xi\,\mathrm{d}\xi-\int_0^{\infty}\frac{1}{\xi}\sin(\omega-\pi)\xi\,\mathrm{d}\xi\right]\\
&= \begin{cases}\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi-\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi\right]=0 & (\omega>\pi)\\ \frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi+\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\pi} & (\omega<\pi)\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{rect}\frac{x}{2\pi} = \begin{cases} 0 & \left(\left|\frac{x}{2\pi}\right| > \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{\pi} & \left(\left|\frac{x}{2\pi}\right| < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

如果不考虑常数因子，本题的 Fourier 变换函数的图像跟图 5-1 相同；以本题的 sinc$t$ 的图象跟图 5-2 也相同．这是由于 Fourier 积分和 Fourier 变换式对变数 ω 和 x 是对称的，亦即 sinc$t$ 和 rect$(x/2\pi)$ 互为 Fourier 变换，可以说 rect$(x/2\pi)$ 是 sinc$t$ 的 Fourier 变换式，也可以说 sinc$t$ 是 rect$(x/2\pi)$ 的 Fourier 变换式.

例3. 把下列脉冲 $f(t)$ 展为 Fourier 积分，

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -T), \\ -h & (-T < t < 0), \\ h & (0 < t < T), \\ 0 & (T < t). \end{cases}$$

注意在半无界区间 $(0, \infty)$ 上，本例的 $f(t)$ 跟例1的 $f(t)$ 相同．

解：因为 $f(t)$ 是奇函数，所以可展开为 Fourier 正弦积分：

$$f(t) = \int_0^{\infty} B(\omega t)\sin \omega t\, \mathrm{d}\omega$$

其 Fourier 变换为：

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{T} h\sin\omega\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\frac{h}{\omega}\int_0^{T}\sin\omega\xi\,\mathrm{d}(\omega\xi)$$

$$= \frac{2h}{\pi\omega}(-\cos\omega\xi)\Big|_0^{T} = \frac{2h}{\pi\omega}(1-\cos\omega T).$$

所以

$$f(t) = \int_0^{\infty}\frac{2h}{\pi\omega}(1-\cos\omega T)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$

5.2.5 Fourier 变换的物理意义—频谱

频谱这个述语来源于光学. 通过对频谱的分析, 可以了解周期函数和非周期函数的一些特性.

由前面的讨论我们知道, 对于满足 Dirichlet 条件的周期函数, 其 Fourier 变换是离散频谱, 相应的图形是离散频谱图.

对满足 Fourier 积分条件的非周期函数 $f(x)$, 其 Fourier 变换 $F(\omega)$ 称为函数 $f(x)$ 频谱函数. $F(\omega)$ 是实自变量的复值函数, 有时也称 $F(\omega)$ 为 $f(x)$ 的复数频谱, 其模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(x)$ 的频谱. 由于 ω 是连续变化的, 这时频谱图是连续曲线, 所以成此频谱为连续频谱.

可以证明, 由上面的例子也可以看出, 频谱 $|F(\omega)|$ 是频率 ω 的偶函数, 即 $|F(\omega)| = |F(-\omega)|$, 在作频谱图时, 只要作出 $(0, \infty)$ 上的图形, 根据对称性即可得到 $(-\infty, \infty)$ 上的频谱图.

对一个时间函数作 Fourier 变换，就是求这个时间函数的频谱，进行 Fourier 逆变换就是由频谱求时间函数.

作业(No.10)

P. 103：

1；2；3；4