§5.3 δ 函数

物理学和其它学科与工程技术上，常常要研究一个量在空间和时间中的分布的密度，如质量密度、电荷密度、单位时间内动量的变化率等，其特点是连续分布并变化的．但是，为了突出主要因素，在许多物理现象中常用理想化模型简化问题，如质点、点电荷、瞬时力等．质点（点电荷）的体积为零，其密度为无限大，但密度（电荷密度）的体积分（总质量或总电量）却是有限的．瞬时力的持续时间为零，力可以视为无限大的，但瞬时力的时间积分（冲量＝动量的变化）是有限的．一般地，具有脉冲性质的物理量都具有上述特点．在普通函数的意义下，找不到能用来描述点源和脉冲的函数．为了描述这类抽象的概念，我们引入一个新的函数—单位脉冲函数（冲击函数），在量子力学中常称为 δ 函数．δ 函数的定义可有许多种方式．

5.3.1 δ 函数

对质量 m 均匀分布在长为 ℓ 的线段 $[-\ell/2, \ell/2]$ 上的情况，其质量线密度 $\rho_\ell(x)$ 可表示为

$$\rho_\ell(x) = \begin{cases} 0\quad, & |x| > \ell/2, \\ m/\ell, & |x| \le \ell/2, \end{cases} \quad \text{即} \rho_\ell(x) = \frac{m}{\ell}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{\ell}\right), \text{矩行脉冲函数} \tag{5.3-1}$$

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\ell(x)\mathrm{d}x = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{m}{\ell}\mathrm{d}x.$$

令 $\ell \to 0$，得位于坐标原点质量为 m 的质点，线密度函数成为质点的密度函数 $\rho(x)$

$$\lim_{\ell\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\ell(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\mathrm{d}x = m.$$

交换运算顺序，积分号下有

$$\rho(x) = \lim_{\ell\to 0}\rho_\ell(x) = \lim_{\ell\to 0}\frac{m}{\ell}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{\ell}\right) = \begin{cases} 0\ , & (x \ne 0), \\ \infty, & (x = 0). \end{cases} \tag{5.3-2}$$

对于质点、点电荷、瞬时力这类集中于空间某点或时间的某瞬时的抽象模型，具有类似的特点。常引入 δ 函数予以描述

$$\delta(x) = \begin{cases} 0\,, & (x \neq 0), \\ \infty, & (x = 0). \end{cases} \tag{5.3-3}$$

$$\int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & (a, b < 0 \text{或} > 0), \\ 1, & (a < 0 < b). \end{cases} \tag{5.3-4}$$

δ 函数的确切意义应在积分运算下理解：δ 函数曲线的“峰”无限高，但其“宽度”无限窄，曲线下的面积是有限值 1. δ 函数是广义函数，与普通函数不同.

有了 δ 函数，位于 x_0 而质量为 m 的质点的线密度分布为 $m\delta(x-x_0)$；位于 x_0 而电量为 q 的点电荷的线密度为 $q\delta(x-x_0)$；作用于瞬时 t_0 而冲量为 K 的瞬时力为 $K\delta(x-x_0)$.

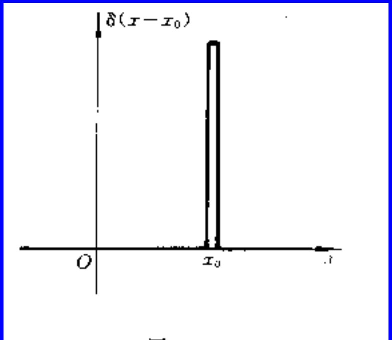

图 5-5

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0\,, & x\neq x_0,\\ \infty, & x=x_0.\end{cases}$$

5.3.2 δ 函数的一些性质

1. δ 是偶函数，其导数是奇函数

$$\begin{aligned}&\delta(-x)=\delta(x),\\ &\delta'(-x)=-\delta'(x).\end{aligned}\qquad(5.3\text{-}5)$$

2. δ 函数是阶跃函数的一阶导数

阶跃函数（Heaviside 单位函数）定义为：

$$H(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0), \\ 1, & (x > 0). \end{cases} \tag{5.3-6}$$

因此，Heaviside 单位函数是 δ 函数的原函数

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{5.3-7}$$

3. δ 函数的挑选性

对定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 $f(\tau)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau - t_0)\mathrm{d}\tau = f(t_0). \tag{5.3-8}$$

称为 δ 函数的挑选性，因为它把函数 $f(\tau)$ 在点 $\tau = t_0$ 的值 $f(t_0)$ 挑选出来.

证明略（P.106）

利用 δ 函数的挑选性定义 δ 函数:

若对于任意定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 $f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) \mathrm{d}t = f(0)$$

或更一般地，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) \mathrm{d}t = f(t_0)$$

则称 $\delta(t)$ 为 δ 函数.

5.3.3 连续分布量和持续作用量的 δ 函数表示

即使是连续分布的质量、电荷或持续作用的力也可用 δ 函数表出. 现在用从 $t = a$ 持续作用到 $t = b$ 的作用力 $f(t)$ 加以说明. 把时间区间 $[a, b]$ 划分为许许多多小段，在某个从 τ 到 $\tau + \mathrm{d}\tau$ 的短时间段上，力 $f(t)$ 的冲量是 $f(\tau)\mathrm{d}\tau$，既然 $\mathrm{d}\tau$ 很短，不防将这段短时间上的

作用力看作瞬时力，记作 $f(\tau)\delta(t-\tau)$．这许许多多前后相继的瞬时力的总计就是持续力 $f(t)$，即

$$f(t)=\sum_{\tau} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_a^b f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (5.3\text{-}9)$$

δ 函数虽然本身没有普通意义下的函数值，但它与任何一个连续函数的乘积在 $(-\infty,\infty)$ 上的积分却有确定的值．

5.3.4 δ 函数是一种广义函数*

由(5.3-3)和(5.3-4)定义的 δ 函数显然不是通常意义的函数．人们现知道它是广义函数．具体地说，δ 函数是某种通常函数系列的极限，而这极限是在积分意义上说的．例如，可以证明（略，P.109）：

$$\delta(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ell}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{\ell}\right), \qquad (5.3\text{-}10)$$

$$\delta(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x}, \qquad (5.3\text{-}11)$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}. \tag{5.3-12}$$

5.3.5 δ 函数的 Fourier 变换

按照(5.2-14)和(5.2-15)可把 δ 函数表为复数形式的傅里叶积分,

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

Fourier 变换为

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}. \tag{5.3-13}$$

所以，δ 函数的 Fourier 积分为

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega. \tag{5.3-14}$$

由 δ 函数的 Fourier 积分式可导出式(5.3-11)和(5.3-12).

δ 函数的 Fourier 积分和变换式应理解为广义 Fourier 积分和变换—用与 δ 函数定义对应的通常函数的 Fourier 积分和变换的极限表

示.

例

例 1 计算 $\frac{1}{r}\delta(r-c)$ 的三重 Fourier 变换，这里 r 是球坐标中的极径，而 c 是正实数.

解：用式(5.2-26)，$\frac{1}{r}\delta(r-c)$ 的三重 Fourier 变换为

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{r}\delta(r-c)\right]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\delta(r-c)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

利用球坐标计算此积分，以 $\vec{r}$ 的方向作为球坐标系的极轴方向

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[\frac{1}{r}\delta(r-c)\right]&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{r}\delta(r-c)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\delta(r-c)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\theta}r\mathrm{d}(-\cos\theta)\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{r=0}^{\infty}\delta(r-c)\frac{1}{\mathrm{i}k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kc} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kc}\right).$$

例 2 求 δ 函数和常值函数 1 的 Fourier 变换.

解：由 δ 函数的定义及 Fourier 变换的定义，从形式上可得

$$\delta(\omega) = \mathscr{F}[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi}$$

因此，

$$\delta(x) = \mathscr{F}^{-1}[\frac{1}{2\pi}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$

于是

$$\mathscr{F}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \delta(\omega)$$

同理

$$\mathscr{F}[\delta(x-x_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}$$

因此，$\delta(x)$ 和 $\delta(x-x_0)$ 的 Fourier 变换分别为 $\frac{1}{2\pi}$ 和 $\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}$.

例 3 求正弦函数 $\sin ax$ 的 Fourier 变换.

解:

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \sin ax dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} e^{-i\omega x} dx$$
$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i(\omega-a)x} - e^{-i(\omega+x)}\right] dx$$
$$= \frac{1}{2i} \left[2\pi\delta(\omega - a) - 2\pi\delta(\omega + a)\right]$$
$$= i\pi [\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)] .$$

例 4 （P.113，1）验证 §5.2 例 2 的频谱 $B(\omega)$ (图5-4)于 $N \to \infty$ 时就成为 $A\delta(\omega - \omega_0) - A\delta(\omega + \omega_0)$，并解释这结果的物理意义.

解：因为

$$B(\omega) = \frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} N 2\pi\right)$$

$$= \frac{A}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} N 2\pi\right)}{\omega - \omega_0} - \frac{A}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} N 2\pi\right)}{\omega + \omega_0}$$
$$= \frac{A}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega - \omega_0)\right]}{\omega - \omega_0} - \frac{A}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega + \omega_0)\right]}{\omega + \omega_0}$$

当 $N \to \infty$ 时，即 $\frac{2\pi N}{\omega_0} \to \infty$，这时有限正弦波列成为无限正弦波列．而

$$B(\omega) = A \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega - \omega_0)\right]}{\omega - \omega_0} - A \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega + \omega_0)\right]}{\omega + \omega_0}$$
$$= A\delta(\omega - \omega_0) - A\delta(\omega + \omega_0).$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin kx}{x} = \delta(x).$$

所以，对于无限正弦波列，它的频谱成为两条线，一条位于 $\omega = \omega_0$ 处，另一条位于 $\omega = -\omega_0$ 处，振动成为单一圆频率 ω 的振

动.

例 5 （P.113，2）把 δ 展为实数形式的 Foruier 积分.

解：因为 δ 是偶函数，它的 Foruier 积分可表示为：

$$\delta(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega,$$

而

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \delta(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\cos(\omega\cdot 0) = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

所以

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega x\,\mathrm{d}\omega,$$

或

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega x\,\mathrm{d}\omega + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega x\,\mathrm{d}\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega x\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos\omega x\,\mathrm{d}\omega.$$

5.3.6 多维 δ 函数

有时也会遇到多维的 δ 函数，例如在三维空间坐标原点的质点，其密度函数就可表为 $m\delta(\vec{r})$，其中 $\delta(\vec{r})$ 定义如下：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0\ , & (\vec{r} \neq 0), \\ \infty, & (\vec{r} = 0). \end{cases}$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1.$$

这样的三维 δ 函数往往用三个一维 δ 函数的乘积表示

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

作业(No.11)

P. 113：

1； 2；

END