第六章 Laplace 变换

上章指出，指出 Fourier 积分和 Fourier 变换存在的条件是原函数 $f(x)$ 在任一有限区域上满足 Dirichlet 条件，并且在 $(-\infty, \infty)$ 区间上绝对可积，这是很强的条件．在许多物理现象中，考虑的是以时间为自变量的函数（如，研究电路中电流、电压和电量的时间变化规律）的初值问题：即已知物理量在初始时刻 $t = 0$（电路接通瞬时）的值 $f(0)$，研究它们在 $t > 0$（联络接通后）的变化情况 $f(t)$，对于 $t < 0$（电路接通之前）的情况，可以不必考虑。另外，许多常见函数（如多项式、三角函数等）不满足 Fourier 变换的条件。

总之，对于物理学和工程技术上常遇到的定义在 $[0, \infty)$ 的函数 $f(t)$ $(0 \leq t < \infty)$，Fourier 变换不在有效，为此我们必需采用新的变换．

历史上，Laplace 变换与无线电工程师 Heaviside 发明的求解线性微分方程的符号法—后经 Jeffreys 发展为运算微积—密切相关.

§6.1 符号法*

运算微积的原始形式是符号法.

函数 $\varphi(t)$ 的 n 阶导数可以看成求导算符 $p = \frac{d}{dt}$ 在函数 $\varphi(t)$ 上作用 n 次的结果，$p^n\varphi(t) = \frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)$．算符 p 的“倒数” $\frac{1}{p}$ 则解释为积分算符，$\frac{1}{p}\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$．例如，

$$\frac{1}{p}1 = \int_0^t 1d\tau = t, \frac{1}{p^2}1 = \int_0^t \int_0^{\tau_1} 1d\tau d\tau_1 = \frac{1}{2}t^2,$$

依此类推，

$$\frac{1}{p^n}1 = \frac{1}{n!}t^n. \tag{6.1-1}$$

无限电工程师承 Heaviside 把符号法应用于求解线性匪分方程，从而大大促进了符号法的应用．例如，电阻 R 和自感 L 串联电路匪

分方程是 $L\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t}+Rj=E$，即

$$\left(L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+R\right)j=E. \tag{6.1-2}$$

Heaviside 把式(6.1-2)改写为

$$j=\frac{E}{Lp+R}1. \tag{6.1-3}$$

算符 p 出现在分母中是没有意义的．式(6.1-3)最多只能当作“j 是微分方程(6.1-2)的解”这句话的缩写．但是 Heaviside 竟把(6.1-3)的分式展开为级数并逐项应用(6.1-1)．

$$j=\frac{E}{Lp+R}1=\frac{E}{Lp}\cdot\frac{1}{1+\frac{R}{l}\frac{1}{p}}1=\frac{E}{Lp}\left(1+\frac{R}{L}\frac{1}{p}\right)^{-1}1$$

$$=\frac{E}{Lp}\left\{1-\frac{R}{L}\frac{1}{p}+\frac{R^2}{L^2}\frac{1}{p^2}-\frac{R^3}{L^3}\frac{1}{p^3}+\cdots\right\}1$$

$$=\frac{E}{R}\left\{\frac{R}{L}\frac{1}{p}-\frac{R^2}{L^2}\frac{1}{P^2}+\frac{R^3}{L^3}\frac{1}{p^3}-\frac{R^4}{L^4}\frac{1}{p^4}+\cdots\right\}1$$

$$= \frac{E}{R}\left\{\frac{R}{L}t - \frac{R^2}{L^2}\frac{t^2}{2!} + \frac{R^3}{L^3}\frac{t^3}{3!} - \frac{R^4}{L^4}\frac{t^4}{4!} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{E}{R}\left\{1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\right\}.$$

Heaviside 就如此解出了微分方程.

作为无线电工程师，Heaviside 不怎么考虑数学的严谨，他取得的成绩使当时数学家大为吃惊. 但是，Heaviside 也作出了一系列计算错误，后来由 Jeffreys 指出乃是没有注意到 p 与 $1/p$ 的次序不可交换，

$$\frac{1}{p}pf(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau f'(\tau) = f(t) - f(0),$$

$$p\frac{1}{p}f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{d}\tau f(\tau) = f(t).$$

后来，人们发现了符号法跟 Laplace 变换的联系，符号法才脱离了粗糙的形式而建立在 Laplace 变换的基础上，通常把它改称为运算微积. 积肥在运算微积中，字母 p 不再解释为算符，而是代表一个复

变数.