§6.2 Laplace 变换

Laplace 变换常用于初值问题，即已知某个物理量在初始时刻 $t = 0$ 的值 $f(0)$，而求解它在初始时刻后的变化情况 $f(t)$．至于在初始时刻之前的值，我们不感兴趣，可以令其为零，即 $f(t) = 0,\ t < 0$.

对于定义在 $(0, \infty)$ 上的函数，并不满足 Fourier 积分和变换的条件．怎么办呢.

方法 设法加工不满足 Fourier 变换条件的函数，使其满足 Fourier 变换条件，从而用 Fourier 变换;

加工 摆脱 Fourier 变换存在性的两个限制条件:

1 由 Heaviside 函数 $H(t)$ 的特点，构造满足 Dirichlet 条件的函数

$$f(t)H(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ f(y), & t>0.\end{cases}\tag{6.2-1}$$

2 用指数函数 $e^{-\sigma t}$ $(\sigma>0)$ 当 $t\to\infty$ 时快速衰减的特点，构造满足绝对可积条件的函数

$$g(t)=f(t)H(t)e^{-\sigma t},\qquad(-\infty<t<\infty).\tag{6.2-2}$$

$e^{-\sigma t}$ 称为收敛因子．对于实际问题，只要 σ 足够大，可保证上面构造的函数 $g(t)$ 是绝对可积的．从而可对加工后的函数 $g(t)$ 进行 Fourier 变换．

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)H(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t.$$

令

$$p = \sigma + \mathrm{i}\omega, \qquad \bar{f}(p) = 2\pi G(\omega),$$

则

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t. \tag{6.2-3}$$

这就是函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换，右边的积分称为 Laplace 积分，e^{-pt} 称为 Laplace 变换的核.

定义：设函数 $f(t)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实（复）函数，如果积分

$$\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \qquad p = \sigma + \mathrm{i}\omega$$

在 p 的某一区域内收敛，则由此积分确定了一个复变数的复值函数 $\bar{f}(t)$ —Laplace 变换

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

由式(6.2-2)表示的 Fourier 变换的逆变换，有

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\bar{f}(\sigma + i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma + i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt}dp. \tag{6.2-4}$$

上式中 $p = \sigma + i\omega, d\omega = \frac{1}{i}dp$.

式(6.2-4)应理解为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \bar{f}(p)e^{pt}dp.$$

式(6.2-4)称为 Laplace 逆变换或 Laplace 变换的反演—Riemann-Mellin 反演公式.

Laplace 变换和 Laplace 逆变换常记为

$$\bar{f}(p) = \mathscr{L}[f(t)], \tag{6.2-5}$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[\bar{f}(p)]. \tag{6.2-6}$$

或等价地

$$\bar{f}(p) \risingdotseq f(t), \tag{6.2-7}$$

$$f(t) \fallingdotseq \bar{f}(p). \tag{6.2-8}$$

注意：原函数均应理解为 $f(t)H(t)$，在逆变换中尤其要注意此点.

6.2.1 Laplace 变换的存在性*

Laplace 积分和变换的存在条件是:

1 在 $0 \le t < \infty$ 的任一有限区间上，除了有有限个第一类间断点外，函数及其导数处处连续；

2 存在常数 $M > 0$ 和 $\sigma \ge 0$，使对任何 t 值（$0 \le t < \infty$），有

$$|f(t)| < Me^{\sigma t}. \tag{6.2-9}$$

上式的意思是 $f(t)$ 的增长速度不超过指数函数，这样的函数称为指数级函数．σ 的下界称为收敛指标，用 σ_0 表示．实际应用中，大多数函数满足此充分条件．

例

例 1 求 Heaviside 函数的 Laplace 变换，即$\mathscr{L}[1]$ 的 Laplace 变换．

解:

$$\mathscr{L}[H(t)] = \bar{H}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty},$$

$$\because \qquad \left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-(\sigma+i\omega)t}\right| = e^{-\sigma t},$$

$\therefore$ 仅当 $\sigma = \mathrm{Re}\,p > 0$ 时，$\lim_{t\to\infty} e^{-pt}$ 存在且为零，所以

$$\bar{H}(p) = \frac{1}{p}, \qquad (\mathrm{Re}\,p > 0).$$

✪ **例 2** 求 δ 函数 $\delta(t)$ 和 $\delta(t-\tau)$ 的 Laplace 变换 $\mathscr{L}[\delta(t)]$ 和 $\mathscr{L}[\delta(t-\tau)]$.

解:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\delta(t)] &= \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-pt}\,dt \\
&= \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-pt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-pt}\,dt \\
&= e^{-pt}\big|_{t=0} = 1.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}[\delta(t-\tau)] = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t-\tau)e^{-pt}\,dt$$

$$= \int_{0^-}^{0^+} \delta(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)e^{-pt}dt$$
$$= e^{-pt}\big|_{t=\tau} = e^{-p\tau}.$$

即

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1, \qquad \mathscr{L}[\delta(t-\tau)] = e^{-p\tau}.$$

例 3 求 $\mathscr{L}[t]$.

解：在 $\mathrm{Re}\,p > 0$ 的上半平面上，

$$\mathscr{L}[t] = \int_0^\infty te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty t\,d\left(e^{-pt}\right)$$
$$= -\frac{1}{p}\left[t\left(e^{-pt}\right)\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt$$
$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2},$$

所以

$$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{p^2},\qquad (\mathrm{Re}p>0).$$

同理

$$\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{p^(n+1)},\qquad (\mathrm{Re}p>0).$$

例 4 求 $\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{st}\right]$ 和 $\mathscr{L}\left[t\mathrm{e}^{st}\right]$, s 为常数.

解：在 $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}s$ 的上半平面上，

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{st}\right]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{st}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p-s)t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{p-s}\left[\mathrm{e}^{-(p-s)t}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{p-s}.$$

所以

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{st}\right]=\frac{1}{p-s},\qquad (\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}s).$$

类似地

$$\mathscr{L}\left[t\mathrm{e}^{st}\right]=\int_0^{\infty}t\mathrm{e}^{st}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t\mathrm{e}^{-(p-s)t}\mathrm{d}=-\frac{1}{p-s}\int_0^{\infty}t\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-(p-s)t}\right]$$

$$= -\frac{1}{p-s}\left\{\left[t\mathrm{e}^{-(p-s)t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(p-s)t}\mathrm{d}t\right\}$$

$$= \frac{1}{(p-s)^2}, \qquad (\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}s).$$

同理

$$\mathscr{L}\left[t^n\mathrm{e}^{st}\right] = \frac{n!}{(p-s)^{n+1}}.$$

例 5 求 $\mathscr{L}[tf(t)]$，其中 $f(t)$ 是存在 Laplace 变换的任意函数.

解：将 Laplace 变换的定义式(6.2-3)，两边分别对 p求导，

$$\frac{\mathrm{d}\bar{f}(t)}{\mathrm{d}p} = \int_0^{\infty}(-t)\mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t,$$

从而

$$tf(t) \doteqdot (-1)\frac{\mathrm{d}\bar{f}(p)}{\mathrm{d}p}.$$

以此类推，有

$$t^n f(t) \doteq (-1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p}\bar{f}(p).$$

6.2.2 Laplace 变换的基本性质

✪ **Laplace 变换确定的函数 $\bar{f}(p)$ 在 $\mathrm{Re}p = \sigma > \sigma_0$ 的上半平面上绝对且关于 p 一致收敛，是解析函数．(了解)**

证明略（P.118）

✪ **当 $|p| \to \infty$，而 $\mathrm{Arg}p \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ 时，$\bar{f}(p)$ 存在，且满足(了解)**

$$\lim_{p\to\infty} \bar{f}(p) = 0. \qquad (6.2\text{-}10)$$

证明略（P.119）

除了某些奇异点外，像函数 $\bar{f}(p)$ 常常可以解析延拓到全平面上去，像函数的解析性质在 Laplace 变换的理论中有重要意义．(了解)

1. 线性定理

如果 $f_1(t) \doteqdot \bar{f}_1(p), f_2(t) \doteqdot \bar{f}_2(p)$，则

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \doteqdot c_1 \bar{f}_1(p) + c_2 \bar{f}_2(p). \tag{6.2-11}$$

证明：由式(6.2-3)，有

$$\begin{aligned} c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) &\doteqdot \int_0^\infty [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] e^{-pt} dt \\ &= \int_0^\infty c_1 f_1(t) e^{-pt} dt + \int_0^\infty c_2 f_2(t) e^{-pt} dt \\ &= c_1 \bar{f}_1(p) + c_2 \bar{f}_2(p). \end{aligned}$$

✪ 例 6 求 $\mathscr{L}[\sin \omega t]$, ω 为常数.

解：

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right),$$

$$\mathscr{L}[\sin\omega t] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\right] = \frac{1}{2i}\mathscr{L}\left[e^{i\omega t}\right] - \frac{1}{2i}\mathscr{L}\left[e^{-i\omega t}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0).$$

同理（也可由下面的导数定理求得）

$$\mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0).$$

2. 导数定理

$$f'(t) \risingdotseq p\bar{f}(p) - f(0). \tag{6.2-12}$$

证明

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}df$$

$$= \left[e^{-pt}f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)d\left(e^{-pt}\right).$$

取 Re$p > \sigma_0$，有 $\lim_{t\to\infty} e^{pt} f(t) = 0$，于是，

$$f'(t) \doteqdot -f(0) - \int_0^\infty f(t)\mathrm{d}\left(e^{-pt}\right) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t - f(0)$$
$$= p\bar{f}(p) - f(0), \qquad (\mathrm{Re}\,p > \sigma_0).$$

推广到高阶导数

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n\bar{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots$$
$$-pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{6.2-13}$$

3. 积分定理

$$\int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau \doteqdot \frac{1}{p}\mathscr{L}[\psi(t)]. \tag{6.2-14}$$

证明：考虑函数 $f(t) = \int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau$，对 $f(t)$ 应用导数定理(6.2-12),

$$f'(t) \doteqdot p\mathscr{L}[f(t)] - f(0) = p\mathscr{L}[f(t)],$$

其中 $f(0)=\int_0^0 \psi(\tau)\mathrm{d}\tau=0$.

$$\frac{1}{p}\mathscr{L}[\psi(t)]=\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}\left[\int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right],$$

即

$$\int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau \doteqdot \frac{1}{p}\mathscr{L}\left[\psi(t)\right].$$

4. 相似定理

$$f(at)\doteqdot \frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right). \tag{6.2-15}$$

5. 位移定理

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\doteqdot \bar{f}(p+\lambda). \tag{6.2-16}$$

以上两条结论可仿照 Fourier 变换的情形验证． 由于原函数 $f(t)$

6. 延迟定理

$$f(t-t_0) \doteqdot e^{-pt_0}\bar{f}(p). \qquad (6.2\text{-}17)$$

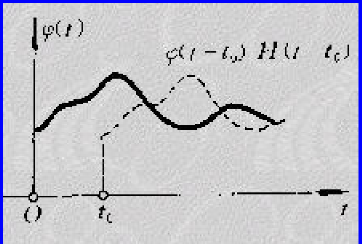

图 6-1

证明：

$$f(t-t_0) \doteqdot \int_0^{\infty} f(t-t_0)e^{-pt}\mathrm{d}t,$$

应理解为 $f(t)H(t)$，因此上式中的 $f(t-t_0)$ 应理解为 $f(t-t_0)H(t-t_0)$，如图6-1中的虚线表示．因而积分下 0 可改为 t_0，即

$$f(t-t_0) \doteqdot \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

改用 $\xi = t - t_0$ 代替 t 作为积分变数，则

$$f(t - t_0) \doteqdot \int_0^\infty f(\xi)e^{-p(\xi+t_0)}d\xi = e^{-pt_0}\int_0^\infty f(\xi)e^{-p\xi}d\xi = e^{-pt_0}\bar{f}(p).$$

7. 卷积定理

若 $f_1(t) \doteqdot \bar{f}_1(p), f_2(t) \doteqdot \bar{f}_2(p)$，则

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot \bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p), \tag{6.2-18}$$

其中 $f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$，称为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积.

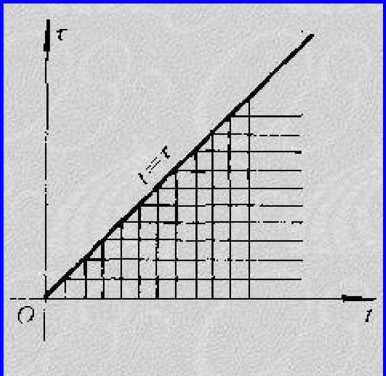

图 6-2

证明:

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty f_1(t) * f_2(t)e^{-pt}dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] e^{-pt}dt.$$

这是二重积分，先对 τ 积分，再对 t 积分，积分区域为图6-2中的画线区域．改变积分次序，先对 t 在对 τ 积分，积分限可参照图6-2确定．

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{\infty}\left[\int_{\tau}^{\infty}f_2(t-\tau)e^{-pt}dt\right]f_1(\tau)d\tau.$$

改用 $\xi=t-\tau$ 替换 t 作为积分变数，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]&=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f_2(\xi)e^{-p\xi}d\xi\right]f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\\&=\int_0^{\infty}f_1(\tau)e^{-pt}d\tau\int_0^{\infty}f_2(\xi)e^{p\xi}d\xi\\&=\bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p).\end{aligned}$$

例 7 求求下列函数的 Laplace 变换函数．（P.122，1）

(1) $\mathrm{sh}\omega t$, $\mathrm{ch}\omega t$, (2) $e^{-\lambda t}\sin\omega t$, $e^{-\lambda t}\cos\omega t$,

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{\pi t}}$, (4) $\delta(t-\tau)$.

解： （1）由位移定理 $\mathscr{L}\left[e^{st}\right] = \frac{1}{p-s}$

$$\varphi_1(t) = \mathrm{sh}\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

$$\bar{\varphi}_1(p) \doteqdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2-\omega^2};$$

$$\varphi_2(t) = \mathrm{ch}\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$$

$$\bar{\varphi}_2(p) \doteqdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

（2）由位移定理 $e^{-\lambda t} f(t) \doteqdot \bar{f}(p+\lambda)$ 和 $\mathscr{L}\left[e^{st}\right] = \frac{1}{p-s}$

$$\varphi_3(t) = e^{-\lambda t}\sin\omega t = \frac{1}{2i}e^{-\lambda t}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$$\bar{\varphi}_3(p) \doteqdot \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega} - \frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right] = \frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2};$$

$$\varphi_4(t) = e^{-\lambda t}\cos\omega t = \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$\bar{\varphi}_4(p) \doteq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p+\lambda) - i\omega} + \frac{1}{(p+\lambda) + i\omega}\right]$$

$$= \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}.$$

（3）

$$\varphi_5(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\bar{\varphi}_5(p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-pt}\,dt,$$

若令 $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$，则

$$\bar{\varphi}_5(p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x} e^{-px^2}\cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-px^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-px^2} \, d(\sqrt{p}x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi p}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} \, dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi p}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

（4）由延迟定理 $f(t-t_0) \doteqdot e^{-pt_0} \bar{f}(p)$

$$\mathscr{L}[\delta(t-\tau)] = e^{-p\tau} \mathscr{L}[\delta(t)] = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} \, dt$$

$$= e^{-p\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} \, dt$$

$$= e^{-p\tau} e^{-pt} \Big|_{t=0} = e^{-p\tau}$$

作业(No.12)

P. 122：1(1)—1(4)

END