# §6.3 Laplace 变换的反演

Laplace 变换主要用于求解线性微分方程（或积分方程），通过变换，原函数所遵从的微分（积分）方程转化为象函数所满足的代数方程，代数方程的求解是容易的．但是，必须把求得的象函数通过 Laplace 逆变换变回到原函数，才能得到原问题的解．由象（原）函数求原函数的过程称为 Laplace 变换的反演．

Laplace 变换反演的方法有：

① 有理分式反演法；
② 查表法；
③ Riemann-Mellin 反演公式法．

## 6.3.1 有理分式法

如果象函数是有理分式，只要把有理分式分解为分项式，然后直

接利用 Laplace 变换的基本公式（变换表），即可获得相应的原函数.

例 1 求

$$\bar{f}(p) = \frac{p^3 + 2p^2 - 9p + 36}{p^4 - 81}$$

的原函数.

解：先将此有理式分解为分项式

$$\begin{aligned}\bar{f}(p) &= \frac{p^3 + 2p^2 - 9p + 36}{(p-3)(p+3)(p^2+9)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3} + \frac{p-1}{p^2+9}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3} + \frac{p}{p^2+9} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}.\end{aligned}$$

应用 §6.2 例 5 的结果，

$$\mathscr{L}\left[e^{st}\right] = \frac{1}{p-s}, \qquad \mathscr{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

即得

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t.$$

## 6.3.2 查表法

许多函数的 Laplace 变换都可在 Laplace 变换数表（见 P.471）中查到，因此利用 Laplace 变换的性质，再配合查表，即可解决其反演问题.

**例 2** 求

$$\frac{e^{-\tau p}}{\sqrt{p}}$$

的原函数.

解：先抛开因子 $e^{-\tau p}$，从附录二见 P.471）第 1 2 式查得

$\frac{1}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{pit}}$. 再利用延迟定理，将原函数中的 $t$ 延迟为 $t-\tau$，即得

$$\frac{e^{-\tau p}}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

✪ 例 3 求

$$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \quad 和 \quad \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$

的原函数.

解：先将两函数的 $p+\lambda$ 位移为 $p$，从附录第 5 、 6 两式查得

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteq \sin\omega t, \qquad \frac{p}{p^2+\omega^2} \doteq \cos\omega t.$$

再应用位移定理，即得

$$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \doteq e^{-\lambda t}\sin\omega t, \qquad \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \doteq e^{-\lambda t}\cos\omega t.$$

**例 4 求**

$$\frac{e^{-ap}}{p(p+b)}$$

**的原函数.**

**解：从 $S6.2$ 例可知，$\frac{1}{p} \doteq H(t)$，用延迟定理，$e^{-ap}/p \doteq H(t-a)$. 又因$1/(p+b) \doteq e^{-bt}$. 所以，本题的象函数可以看作 $e^{-ap}/p$ 与 $1/(p+b)$ 的乘积，应用卷积定理，有**

$$\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} \doteq \int_a^t H(\tau-a)e^{-b(t-\tau)}d\tau = H(t-a)\int_a^t e^{-b(t-\tau)}d\tau$$

$$= H(t-a)\left[\frac{1}{b}e^{-b(t-\tau)}\right]_a^t = \frac{1}{b}\left[1-e^{-b(t-a)}\right]H(t-a).$$

**例 5 求（P.122，(2)）**

$$e^{-\lambda t}\sin\omega t, \qquad e^{-\lambda t}\cos\omega t$$

**的原函数.**

**解：(a)**

$$\varphi(t)=e^{-\lambda t}\sin\omega t=\frac{1}{2i}e^{-\lambda t}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)$$

$$\doteq\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega}-\frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right]$$

$$=\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.$$

**(b)**

$$\varphi(t)=e^{-\lambda t}\cos\omega t=\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)$$

$$\doteq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega}+\frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right]$$

$$=\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.$$

## 6.3.3 Riemann-Mellin 反演公式*

**在不能用以上两种方法求反演时，原则上可利用(6.2-4)求原函**

数．(6.2-4)正是著名的 Riemann-Mellin 反演公式．

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\bar{f}(p)\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{f}(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p.$$

这是从象函数求原函数的一般公式．根据 Laplace 变换存在的条件及其特性，我们进一步知道，在(6.2-4)中，$\sigma$ 应是大于收敛横标 $\sigma_0$ 的任意正数．而积分路径是 $p$ 平面上平行于虚轴的一条直线，象函数在这条直线的右半平面上没有奇点．

由于象函数 $\bar{f}(p)$ 是 $p$ 的解析函数，(6.2-4)中的积分可以借助于留数定理而求得．为了应用留数定理，需要将 §4.2 中的约当引理加以推广．(后略)

例 7 把下列像函数反演．（P.127，1）

(1) $\bar{y}(p)=\dfrac{6}{(p+1)^4}$，　(2) $\bar{y}(p)=\frac{3p}{p^2-1}$;

(3) $\bar{y}(p)=\dfrac{1}{p-2}$, $\bar{z}(p)=\dfrac{3}{p-2}$,　(4) $\bar{y}(p)=\frac{2}{(p-1)^5}$.

**解：**（1）由位移定律得

$$\frac{3!}{(p+1)^{(3+1)}} \doteq t^3 e^{-t}$$

（2）

$$\frac{3p}{p^2-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1}\right) \doteq \frac{3}{2}(e^{-t} + e^{t}) = 3\cosh t.$$

**注意：** $\cosh t = \mathrm{ch}t$ 称为双曲余弦.

（3）

$$\frac{1}{p-2} \doteq e^{2t} = y(t),$$

$$\frac{3}{p-2} \doteq 3e^{2t} = z(t).$$

（4）

$$\frac{2}{(p-1)^{(4+1)}} \doteq \frac{2}{4!} t^4 e^{t}.$$

✪ 例 8 求 $\overline{y}(p) = \lambda\mu\frac{p}{(p+C)^4}$ 的原函数.（P.127，4）解:

$$\overline{y}(p) = \lambda\mu\left[\frac{p+C}{(p+C)^4} - \frac{C}{(p+C)^4}\right]$$

$$= \lambda\mu\left[\frac{1}{(p+C)^3} - \frac{C}{(p+C)^4}\right]$$

$$y(t) = \mathscr{L}[\overline{y}(p)] = \lambda\mu\left[\frac{1}{2!}t^2\mathrm{e}^{-Ct} - \frac{C}{3!}t^3\mathrm{e}^{-Ct}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lambda\mu\mathrm{e}^{-Ct}\left[t^2 - \frac{C}{3}t^3\right].$$

✪ 例 9 . 求下列像函数的原函数.（P.128，12）

(1) $\overline{I}(p) = \frac{\pi}{2a}\frac{1}{p+a}$，　(2) $\overline{I}(p) = \frac{\pi}{2p}$,

(3) $\overline{I}(p) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{p(p+1)}$，　(4) $\overline{I}(p) = \frac{\pi}{2p^2}$.

**解:**

(1) $I(t)=\dfrac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-at}.$

(2) $I(t)=\dfrac{\pi}{2}.$

(3) $\bar{I}(p)=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}\right),$

$I(t)=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right).$

(4) $I(t)=\dfrac{\pi}{2}t.$