§6.4 Laplace 变换应用举例

综合以上两节，用 Laplace 变换求解微分（积分）方程的步骤可归纳为：

(1) 对方程施行 Laplace 变换，并对初始条件一并考虑；
(2) 从变换后得到的线性方程解出象函数；
(3) 对象函数进行 Laplace 反演，原函数就是原来方程的解.

例 1 求交流 RL 电路的方程

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j + Rj = E_0 \sin \omega t, \\ j(0) = 0. \end{cases}$$

解：对方程施行 Laplace 变换，

$$Lp\bar{j} + R\bar{j} = E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

由此解出

$$\bar{j}(p) = \frac{E_0}{Lp+R}\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{E_0}{L}\frac{1}{p+R/L}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

最后进行反演，因为

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \fallingdotseq \sin\omega t, \qquad \frac{1}{p+R/L} \fallingdotseq e^{-(R/L)t},$$

利用卷积定理完成反演

$$\begin{aligned} j(t) &= \frac{E_0}{L}\int_0^t e^{-(R/L)(t-\tau)}\sin\omega\tau d\tau \\ &= \frac{E_0}{L}\left\{e^{-(R/L)t}\left[e^{(R/L)\tau}\frac{(R/L)\sin\omega\tau-\omega\cos\omega\tau}{R^2/L^2+\omega^2}\right]_0^t\right\} \\ &= \frac{E_0}{L}\frac{(R/L)\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{R^2/L^2+\omega^2} + \frac{E_0}{L}\frac{\omega e^{-(R/L)t}}{R^2/L^2+\omega^2} \\ &= \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-\omega\cos\omega t) + \frac{E_0\omega L}{R^2+L^2\omega^2}e^{-(R/L)t}. \end{aligned}$$

所得结果的第一部分代表一个稳定的(幅度不变的)振荡，第二部分则

是随时间而衰减的.

稳定振荡部分还可以改写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-\omega\cos\omega t)\\
=&\ \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\omega t-\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\omega t\right)\\
=&\ \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(\cos\theta\sin\omega t-\sin\theta\cos\omega t)\\
=&\ \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\sin(\omega t-\theta),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\theta=\arccos\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\arcsin\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.
$$

电工学里常用的复数阻抗法或矢量罚只给出这个形式的稳定振荡，没有考虑随时间衰减的部分地区.

例 2 两个线圈（图6-5）具有相同的 R, L 和 C. 两线圈之间互感系数为 M，在初级线路有直流电源，其电压为 E_0，今接通初级线路中的电钥 K，问初级电路中的电流 j_2 的变化情况如何?

解：先写出电路方程，

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_1 + Rj_1 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t j_1\mathrm{d}t + M\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_2 = E_0, \\ L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_2 + Rj_2 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t j_2\mathrm{d}t + M\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_1 = 0, \\ j-1(0) = 0, \quad j_2(0) = 0, \quad \text{初始条件.} \end{cases}$$

对方程施行 Laplace 变换，

$$\begin{cases} \left(Lp + R + \dfrac{1}{Cp}\right)\bar{j}_1 + Mp\bar{j}_2 = \dfrac{E_0}{p}, \\ \left(Lp + R + \dfrac{1}{Cp}\right)\bar{j}_2 + Mp\bar{j}_1 = 0. \end{cases}$$

由此解得 $\bar{j}_2$

$$\bar{j}_2 = \frac{E_0 M p^2}{M^2 p^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2}.$$

把其分解为分项式

$$\bar{j}_2 = \frac{E_0}{2}\left[\frac{1}{(L+M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}} - \frac{1}{(L-M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}}\right].$$

应用 §6.3 例 3 进行反演，得

$$j_2(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t}\sin\omega_1 t + C_2 e^{-\lambda_2 t}\sin\omega_2 t,$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{R}{2(L+M)}, \qquad \lambda_2 = \frac{R}{2(L-M)},$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{C(L+M)} - \frac{R^2}{4(L+M)^2}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{C(L-M)} - \frac{R^2}{4(L-M)^2}},$$

$$C_1 = \frac{E_0}{2(L+M)\omega_1}, \quad C_2 = \frac{-E_0}{2(L-M)\omega_2}.$$

例 3 求解下列常微分方程. （P.131，1）

(1) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{ddt} + y = 6e^{-t}$，$y(0) = \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = \dfrac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0} = 0,$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 30\cosh t$，$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

解：（ 1 ）对该方程施行 Laplace 变换，得

$$\overline{y}(p) = \frac{6}{(p+1)^4},$$

然后再求出 $\overline{y}(p)$ 的原函数为

$$y(t) = t^3 e^{-t}.$$

这就是该常微分方程的解.

（2）对该方程施行 Laplace 变换，得

$$\overline{y}(p) = \frac{3p}{p^2 - 1},$$

然后再求出 $\overline{y}(p)$ 的原函数为

$$y(t) = 3\cosh t,$$

此即该常微分方程的解.

例 4 电压为 E 的直流电源通过电感 L 和电阻 R 对电容 C 充电. 求解充电电流 j 的变化情况. （P.131，1）

解：设电键 K 关闭前电路中无电流，即 $j(0) = 0$. 电键 K 闭合后电流 j 所满足的微分方程是

$$L\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} + Rj + \frac{1}{C}\int_0^t j\,\mathrm{d}t = E.$$

结合初始条件 $j(0) = 0$ 对上述方程施行 Laplace 变换后，得

$$Lp\overline{j}(p) + R\overline{j}(p) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{p}\overline{j}(p) = \frac{E}{p},$$

$$Lp^2\bar{j}(p) + Rp\bar{j}(p) + \frac{1}{C}\bar{j}(p) = E,$$

$$\bar{j}(p) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

然后再求出 $\bar{j}(p)$ 的原函数为

(1) 如果 $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$，则

$$j(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

(2) 如果 $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$，则

$$j(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t.$$

(3) 如果 $R^2 - \frac{4L}{C} <$ 如果0，则

$$j(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t.$$

作业(No.13)

P. 127：1(1)—1(4)；4；12(1)—12(4)

P. 131：1(1)、1(2)；2

END