第二部分　数学物理方程

在物理学、力学、工程技术和社会经济等许多具体问题中，常常需要从数量上来描述研究对象，这就要求我们建立关于这些对象的数学模型，从定量上来刻画各量之间的关系．这样的数学模型可能是一个函数方程，称为数学物理方程．如果它是一个未知函数及其各阶偏导数的方程，就称其为偏微分方程．

数学物理方程是物理学的一个分支—数学物理所涉及的偏微分方程，有时也包括相关的积分方程、微分积分方程．

本篇通过几个不同的物理模型推倒出几个典型的方程，然后介绍三类偏微分方程及其有关定解问题和这些问题的常用解法．

第七章 数学物理定解问题

物理量仅是时间的函数—常微分方程
物理量仅是时间和空间的函数—偏微分方程
} 普遍性、共性.

求解具体问题 {
必须考虑对象所处的“环境”—边界条件
必须考虑对象所处的“历史”—初始条件

边界条件和初始条件反应了具体问题的特定环境和历史，即问题的特殊性、个性．在数学上，边界条件和初始条件合称定解条件．

物理问题的共性—物理规律的数学表示：数学建模，通俗地讲，就是把物理规律用数学语言“翻译”出来，体现为物理量在时空中的变化关系．这种关系通常是偏微分方程．

数学物理方程—物理规律的偏微分方程形式是同类物理现象的共

性，更具体的条件无关，称为泛定方程.

物理问题在数学上的完整提法—数学物理定解问题（定解问题）：在给定定解条件下，求解数学物理方程.

§7.1 数学物理方程的建立—数学建模

由于物理规律反映的是物理量在临近地点和临近时间之间的联系，因此原则上讲，其建立过程为：

1 确定研究对象；
2 分析临近部分与所划出的小部分间的相互作用；
3 分析短时间内相互作用的影响.

把上述作用和影响经简化（只考虑主要的、重要的作用和影响）整理就是数学物理方程.

数学物理方程 $\begin{cases} \text{①波动方程—双曲型} \\ \text{②输运方程—抛物型} \\ \text{③稳定常方程—椭圆型} \end{cases}$ 偏微分方程

当然还有其它类型的方程.

7.1.1 均匀弦的微小横振动

(1). 振动与波动的机理—张力、弦（介质）

(2). 均匀、轻质弦的一维横向微小振动

轻质弦—无振动的弦在绷紧时是一根直线.
选弦上各点所在平衡位置的直线为 x 轴，横向位移为 u. 因此，下面的任务就是建立 $u(x,t)$ 满足的方程.

弦的振动是机械振动，机械运动的基本规律是质点动力学—Newton 第二定律 $\vec{F}=m\vec{a}$. 因此需要将质量均匀连续分布的弦分为很多微元，对每个微元利用 Newton 第二定律—建模使用的原理（规律）.

$$F_x = T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0,$$

$$F_u = T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1.$$

选择平衡位置在 $(x, x+\mathrm{d}x)$ 上的微元 B 加以研究．对轻质弦，它仅受临近微元 A, C 施加的拉力 $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ 的作用．

由于弦没有纵向（x 轴向）的运动，因此，作用于 B 上的纵向合力为零．微元 B 所受外力的纵、横向分量分别为

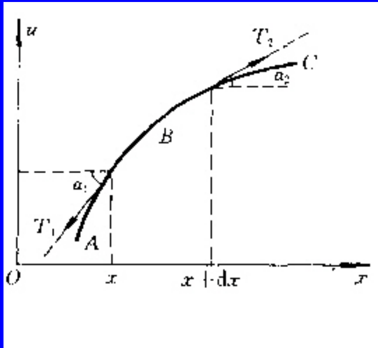

图 7-1

如用 u_{tt} $\left(\partial u^2/\partial t^2\text{的缩写}\right)$表示横向加速度，则

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0, \tag{7.1-1}$$

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = (\rho\mathrm{d}s)u_{tt}. \tag{7.1-2}$$

式中，ρ—线密度，$\mathrm{d}s$—微元 B 的长度．

由于仅考虑很小的振动，因此 α_1, α_2 为小量，所以，

$$\cos\alpha_1 = 1 - \alpha_1^2/2 + \cdots \doteq 1 \quad , \quad \sin\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_1^3/3! + \cdots \doteq \alpha_1,$$

$$\cos\alpha_2 = 1 - \alpha_2^2/2 + \cdots \doteq 1 \quad , \quad \sin\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_2^3/3! + \cdots \doteq \alpha_2,$$

$\mathrm{tg}\alpha_1 = u_x|_x$ （点 x 的斜率）， $\mathrm{tg}\alpha_2 = u_x|_{x+\mathrm{d}x}$ （点 $x+\mathrm{d}x$ 的斜率），

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}u)^2} = \sqrt{1 + u_x^2}\mathrm{d}x \doteq \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}\mathrm{d}x \doteq \mathrm{d}x.$$

所以，式(7.1-1)和(7.1-2)变为（弦 $\mathrm{d}x$ 在振动过程中质量不变）

$$T_2 - T_1 = 0, \tag{7.1-3}$$

$$T_2 u_x|_{x+\mathrm{d}x} - T_1 u_x|_x = u_{tt}\rho\mathrm{d}x. \tag{7.1-4}$$

可见，弦中的张力既与 x 无关，也与 t 无关，是一常数，记为 T.

式(7.1-4)成为

$$T\left(u_x|_{x+\mathrm{d}x} - u_x|_x\right) = \rho u_{tt}\mathrm{d}x,$$

$$T\frac{u_x|_{x+\mathrm{d}x} - u_x|_x}{\mathrm{d}x} = \rho u_{tt},$$

记 $$u_{xx} = \frac{u_x|_{x+dx} - u_x|_x}{dx}.$$

得 B 短的运动方程为

$$\rho u_{tt} - T u_{xx} = 0. \tag{7.1-5}$$

这就是弦振动方程. 对均匀弦，ρ 是常数，令

$$a^2 = \frac{T}{\rho},$$ 以后将知道这正是振动传播的速度,

则

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{7.1-6}$$

(3). 讨论

✪ 如果弦受到外加横向强迫力作用，每单位长度弦所受强迫勒为 $\vec{F}(x,t)$，则

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{7.1-7}$$

$$f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}\qquad \text{力密度.}$$

$f(x,t)$—t 时刻作用于 x 处单位质量的横向强迫力. 式(7.1-7)称为弦的受迫振动方程，式(7.1-6)称为弦的自由振动方程.

✪ 对三维振动，同理可得

$$u_{tt}-a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)=f(x,y,z,t).$$

7.1.2 均质杆的纵振动

(1). 纵振动与纵波的机理—张力和杆（介质）

(2). 均质杆的纵振动

同横向振动，除杆的振动位移在纵向外. 仍然采用微元法.

选择平衡位置在 $(x, x+\mathrm{d}x)$ 上的微元 B. 在振动过程中，B 的伸长量（位移）为 相对伸长 u_x 是 x 的函数，在 B 的两端

$$u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)=\mathrm{d}u\,|_t$$

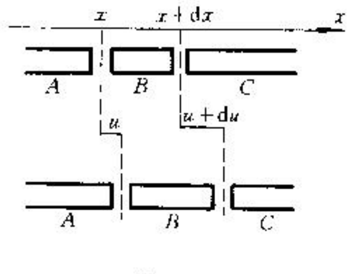

图 7-2

相对伸长为

$$\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u|_t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=u_x.$$

$u_x|_x \neq u_x|_{x+\mathrm{d}x}$. 由于 Hoke 定律，$B$两端的张应力或胁强（单位横截面两方的相互作用力）分别为

$$Yu_x|x, \qquad Yu_x|_{x+\mathrm{d}x}$$

Y—Young 氏模量：在弹性限度内，张应力与相对伸长（胁变）之比，即

$$Y=\frac{F/S}{u_x}.$$

因此，其运动方程为

$$\rho(S\mathrm{d}x)u_{tt} = Y(u_x|_{x+\mathrm{d}x} - u_x|_x)S = YS\frac{u_x|_{x+\mathrm{d}x} - u_x|_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$
$$= YSu_{xx}\mathrm{d}x.$$

即

$$\rho u_{tt} - Yu_{xx} = 0, \qquad \text{自由纵振动方程.} \qquad (7.1\text{-}8)$$

令

$$a^2 = \frac{Y}{\rho}, \qquad \text{传播速度,}$$

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \qquad (7.1\text{-}9)$$

可见，纵振动方程与横振动方程具有完全的形式.

对杆的纵向受迫振动，方程也与横振动完全相同，只是其中 $f(x,t)$ 应理解为杆每单位横截面每单位质量上所受的纵向外力.

7.1.3 传输线方程—电报方程（不要求）

容易证明，理想传输线（导线电阻 R 和线间电漏 G 很小的传输线）方程（电报方程）为

$$j_{tt} - a^2 j_{xx} = 0,$$

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0.$$

其中，$a^2 = 1/LC = c^2$ 即光速的平方.

7.1.4 均匀薄膜的微小横振动

容易证明，均匀薄膜的微小横振动方程为

$$u_{tt} - a^2 \Delta_2 u = 0, \qquad \text{自由振动方程,}$$

$$u_{tt} - a^2 \Delta_2 u = f(x, y, t), \qquad \text{受迫振动方程.}$$

其中，Δ_2 称为二维 Laplace 算符，定义为

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla\cdot\nabla,$$

三维 Laplace 算符是

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla\cdot\nabla,$$

$a^2 = T/\rho$ 为膜上振动传播的速度，$f(x,y,t) = F(x,y,t)/\rho$ 为作用于单位面积单位质量上的横向外力.

7.1.5 流体力学与声学方程（略）

流体力学中研究的物理量是流体的流动速度 v、压强 p 和密度 ρ. 对于声波在空气中的传播，相应地要研究空气质点在平衡位置附近的振动速度 v、空气的压强 p 和密度 ρ. 物体的振动引起周围空气压强和密度的变化，使空气中形成疏密相间的状态，这种疏密相间状态向周围的传播形成声波.

可以证明，理想流体（无粘性和无旋性）中声波方程为

$$u_{tt} - a^2\Delta_3 u = 0,$$

其中，$a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$，$p_0$ 和 ρ_0 是空气处于平衡状态时的压强和密度.

7.1.6 Maxwell 电磁波方程

在电磁学和电动力学中，由微分形式的 Maxwell 方程组可以证明，真空中的电磁波方程（在国际单位下）为

$$\vec{E}_{tt} - a^2\Delta_3\vec{E} = 0,$$

$$\vec{H}_{tt} - a^2\Delta_3\vec{H} = 0.$$

其中，$a^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$ 光速的平方，$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 分别是电场强度和磁场强度.

以上各个过程，形式和实质都有差异，但在数学描述上，它们遵守相同的规律—都是波动形式的方程.

7.1.7 扩散方程

由于浓度（原子、分子数或质量）不均匀，物质由浓度大的地方向浓度小的地方转移的现象称为扩散.

1. 研究的物理量

浓度的空间分布和时间变化是 $u(x, y, z, t)$，基本任务就是要建立 $u(x, y, z, t)$ 满足的方程.

2. 扩散的规律

① 浓度梯度—描述浓度不均匀的程度，用浓度沿浓度等量面法向导数—梯度来描述，记为 ∇u. 即

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} = \text{grad—梯度算符}.$$

② 扩散流强度—单位时间通过单位截面的原子、分子或质量数，记为 $\vec{q}$. 由扩散定律（斐克定律）确定，实验证明：

$$\vec{q} = -D\nabla u,$$

D—扩散系数，是物质、时、空和温度的函数.

③ 能量（粒子数）守恒定律—闭合曲面内单位时间增加的粒子数等于单位时间内净流入闭合曲面内的粒子数与闭合曲面内净产生的粒子诉之和.

3. 扩散方程

为简短起见，设微元为闭合曲面内长方体的体元 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，单位时间内向 x 方向的扩散：设在 x 处经左侧面流入的流量是

$$q_x\,|_x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在 $x+\mathrm{d}x$ 处经由侧面流出的粒子数为

$$q_x|_{x+\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

于是，单位时间内沿 x 轴净流入量为

$$-(q_x|_{x+\mathrm{d}x}-q_x|_x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}V$$

同理，沿 y,z 方向净流入量为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}V,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

对于没有源和汇的情况，有粒子数守恒定律，得

单位时间内微元中增加的粒子数 = 单位时间内净流入量

即

$$\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V,$$

$$u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = 0.$$

这就是三维无源无汇的扩散方程．当 D 是空间常数时，有

$$u_t - D\Delta_3 u = 0 \qquad \text{or} \qquad u_t - D\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) = 0.$$

式中，

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

称为三维 Laplace 算子．如令

$$a^2 = D,$$

则

$$u_t - a^2\Delta_3 u = 0.$$

对于有源的情况，如源强度（单位时间单位体积中产生的粒子

数）为 $F(x,y,z,t)$，且与浓度 u 无关，则

$$u_t-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=F(x,y,z,t),$$

$$u_t-a^2\Delta_3u=F(x,y,z,t).$$

对于 $F(x,y,z,t)=b^2u$ 时

$$u_t-a^2\Delta_3u-b^2u=0.$$

7.1.8 热传导方程

热传导是因温度不均匀而引起的．因此，除了物理量不同外，它与扩散过程遵守相同的方程．对于均匀物体内无源无汇的情况，三维热传导方程为

$$c\rho u_t-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=0,$$

$$u_t-a^2\Delta_3u=0.$$

其中，c 是比热，ρ 是密度，k 为热传导系数，对均匀物体，它们是常数. a^2 为

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

如果在物体内存在热源，热源强度（单位时间在单位体积中产生的热量）为 $F(x, y, z, t)$，热传导方程变为

$$c\rho u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = F(x, y, z, t).$$

对均匀物体，进一步简化为

$$u_t - a^2\Delta_3 u = f(x, y, z, t).$$

其中 $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t)/c\rho$ 称为热源强度.

7.1.9 稳定浓度分布

如果扩散源强度 $F(x, y, z, t)$ 不随时间变化，扩散运动持续进行下

去，最终达到稳定状，空间各点的浓度不再随时间变化，即 $u_t = 0$，于是，如扩散系数 D 是常数，扩散方程简化为

$$D\Delta_3 u = -F(x, y, z, t).$$

称为 Poisson 方程．如无源，则

$$\Delta_3 u = 0.$$

称为 Laplace 方程．上面两个方程就是稳定浓度分布的扩散方程．

7.1.10 稳定温度分布

如果热源强度严 $F(x, y, z, t)$ 不随时间变化，热传导持续进行下去，最终将达到稳定状态，空间中各点的温度不再随时间变化，即 $u_t = 0$，于是，于是，如热传导系数 k 是常数，热传导方程简化为，

$$k\Delta_3 u = -F(x, y, z, t).$$

称为 Poisson 方程．如无热源，则

$$\Delta_3 u = 0.$$

称为 Laplace 方程．上面两个方程就是稳定温度分布的热传导方程．

7.1.11 静电场

静电场由 Gauss 定理和环流定理完全描述，即

$$\oint_\Sigma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_T \rho \mathrm{d}V,$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0.$$

由 Stokes 公式，得

$$\oint_\Sigma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_T \nabla\cdot\vec{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_T \rho \mathrm{d}V =: \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\Sigma \nabla\times\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad =: \nabla\times\vec{E} = 0.$$

由静电场的无旋性可知，场强 $\vec{E}$ 知道可表示为某一标量函数的梯度

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

该标量函数称为电势，代入上面的散度方程，得

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,$$

$$\Delta_3 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

这就是静电场的势函数所满足的静电场方程，是 Poisson 方程．在无源空间，$\rho = 0$，Poisson 方程简化为 Laplace 方程

$$\Delta_3 V = 0.$$

7.1.12 稳恒电流场（不要求）

7.1.13 杆的微小横振动（不要求）

7.1.14 量子力学的 Schrödinger 方程

以上各例讨论的是经典物理学的情形．作为另一类例子，这里提一下量子力学的 Schrödinger 方程．微观蚊子在势场 $V(x, y, z, t)$ 中，波函数 u (为符号前后一贯起见，这里用 u 表示波函数，而在量于力学中通常是用 ψ)，满足 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar^2 u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu.$$

这里系数中出现虚数单位 i，而前面所讲方程的系数全是实数．势能 V 不显含时间 t 情况叫作定态．对于定态，上面的方程简化为定态 Schrödinger 方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu = Eu.$$

E 为微观粒子体系的能量.

✪ 例

✪ 例 1 拿图7-7的 B 段弦作代表，推导弦振动方程．（P.152，1）

解：取 x 到 $x + \mathrm{d}x$ 的 B 段弦，这段弦无纵向振动，所以纵向合力为零，

$$T_2 \cos\alpha_2 - T_1 \cos\alpha_1 = 0.$$

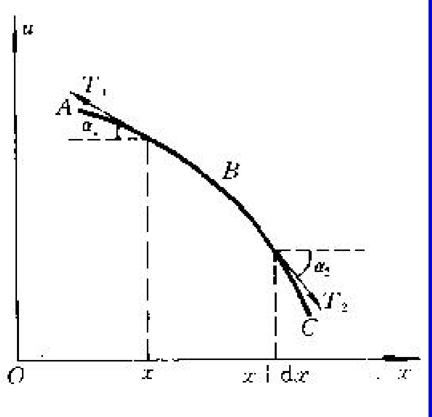

图 7-7

B 段弦的横振动方程为

$$T_1 \sin\alpha_1 - T_2 \sin\alpha_2 = u_{tt}\rho \mathrm{d}s.$$

在小振动的情况下，有

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 0, \cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx 1,$$

$$\mathrm{d}u \approx 0, \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}u^2} \approx \mathrm{d}x,$$

$$\sin\alpha_1 \approx \mathrm{tg}\alpha_1,\ \sin\alpha_2 \approx \mathrm{tg}\alpha_2,$$

如题文图所示，

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = -u_x|_x,\ \mathrm{tg}\alpha_2 = -u_x|_{x+\mathrm{d}x},$$

故在小振动的情况下，运动方程为

$$\begin{cases} T_1 = T_2, \\ T_2 u_x|_{x+\mathrm{d}x} - T_1 u_x|_x = u_{tt}\rho\mathrm{d}x, \end{cases}$$

即

$$\frac{T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x} - T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x}{\mathrm{d}x} = \rho u_{tt},$$

上式左边即

$$T\frac{\partial u_x}{\partial x} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

所以，令 $a^2 = \frac{T}{\rho}$，有

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

这就是所求振动方程.

作业(No.14)

P. 152：1