§7.2 定解问题

以上导出的偏微分方程是对应问题物理规律的共性描述，但是任何具体的物理过程都是处于某种特定条件下的．特定条件就是指物体（对象）所处的特定“环境”和“历史”，即边界条件和初始条件．

边界条件—描述对象在边界上的物理状态

初始条件—描述对象在初始时刻的物理状态

边界条件和初始条件合称定解条件

7.2.1 初始条件

1. 输运（扩散、热传导）过程的初始条件

指研究的物理量 u 的初始分布（浓度、温度分布），具体是

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z,t), \qquad \varphi\text{是已知函数}. \tag{7.2-1}$$

2. 振动过程的初始条件（弦、杆、膜、声振动、电磁波）

指 $t=0$ 的初始振动“位移”和“速度”，即

$$u(x,y,z,t)|_{t=0}=\varphi(x,y,z,t), \tag{7.2-2}$$

$$u_t(x,y,z,t)|_{t=0}=\phi(x,y,z,t). \tag{7.2-3}$$

以上两种情况下，初始条件导数数目不同是因为它们（泛定方程）分别是时间的一阶和二阶偏微分方程。初始速度显然为零，即

注意：初始条件应当指 $t=0$ 时刻整个系统的初始状态，而非个别点的初始状态．例如，一根长为 l 而两端固定的弦，用手把它的中点朝横向拨开距离 h (图7—8)，然后放手任其振动．所谓初始时刻就是放手的那个瞬间．初始条件就是放手那个瞬间的弦的位移和速度．

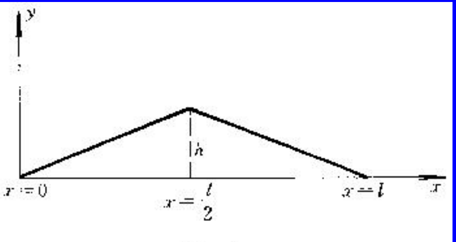

图 7-8

$u_t(x,t)|_{t=0}=0$；至于初始位移如写成

$$u(x,t)|_{t=0}=h,$$

那就错了，因为 h 只是弦的中点的初始位移，其他各点的位移并不是 h．考虑到弦的初始形状是由两段直线衔接而成，初始位移应是 x 的分段函数，即

$$u(x,t)|_{t=0}=\begin{cases}(2h/l)x \quad , & (\text{在}[0,l/2]\text{上}),\\(2h/l)(l-x), & (\text{在}[l/2,l]\text{上}).\end{cases}$$

3. 无初始条件—自由输运、自由振动

在无外源时，输运过程中的输运称为自由输运；在无外力时，只是由于初始偏离或初始速度（能量）引起的振动称为自由振动．自由输运和自由振动最终都会衰减为零．因此，对有源输运和受迫振动，可以不计初始条件的影响．

7.2.2 边界条件

1. 边界条件的分类

- 第一类：直接规定了物理量在边界上的取值，又称 Dirichlet 边界条件；
- 第二类：直接规定了物理量在边界法向的方向导数值，又称 Neumann 边界条件；
- 第三类：规定了物理量及其外法向导数的线性组合的数值，又称 Robin 边界条件.

具体可以表示为

$$
\begin{aligned}
&\text{第一类} \qquad u(x,y,z,t)\big|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0} = f(x_0,y_0,z_0,t),\\
&\text{第二类} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0} = f(x_0,y_0,z_0,t),\\
&\text{第三类} \qquad (u+Hu_n)\big|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0} = f(x_0,y_0,z_0,t).
\end{aligned}
\tag{7.2-4}
$$

其中，f 是时间 t 的已知函数，H 为常数.

不论何种类型的边界条件，如表达式中的自由项（不依赖与未知函数 u 的项）为零，称该边界条件为齐次的，反之为非齐次的．既有边界条件又有初始条件组成的定解问题称为混合问题．

2. 第一类边界条件

(1). 两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定的弦的振动

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

(2). 细杆热传导

一端 $x=a$ 的温度按已知规律 $f(t)$ 变化，

$$u(x,t)|_{x=a} = f(t) \tag{7.2-5}$$

如 $f(t0 = u_0$，即恒温，则

$$u(x,t)|_{x=a} = u_0. \tag{7.2-6}$$

(3). 恒定表面浓度扩散

表面 $x = 0$ 和 $x = l$ 处，边界上的物理状况—杂质浓度 u 不变

$$\begin{cases} u(x,t)|_{x=a} = N_0, \\ u(x,t)\,|_{x=l} = N_0. \end{cases}$$

3. 第二类边界条件

(1). 纵振动的杆

某个端点 $x = a$ 受到沿端点外法向的外力 $f(t)$ 作用，由 Hoke定律，该端点的张应力 $Yu_n|_{x=a}$ 与外力的关系为

$$S\,(Yu_x)\,|_{x=a} = f(t). \tag{7.2-7}$$

对于 $x = a$ 自由，则

$$u_n|_{t=a} = 0,$$

当 $f(t) \neq 0$ 时

$$u_x|_{x=a} - f(x)/YS,$$

$$u_x|_{x=l} = f(t)/YS.$$

(2). 细杆热传导

杆的异端 $x = a$ 有热源 $f(t)$ 沿改端点外法向流出，则由热传导定律，边界条件为

$$-ku_n|_{x=a} = f(t).$$

如有热流 $f(t)$ 流入，则

$$-ku_n|_{x=a} = -f(t).$$

如绝热，则

$$u_n|_{x=a} = 0.$$

4. 第三类边界条件（了解）

7.2.3 衔接条件（了解）

初值（Cauchy）问题：仅由泛定方程和初始条件组成的定解问题. 此时，如考虑物体内的一部分，在所考虑的时间内，其边界的影响可以忽略不计，则可以认为该区域是无边界的，而不必考虑边界条件.

边值问题（Laplace 和 Poisson 方程）：只有边界条件而无初始条件的定解问题.

对一个具体问题，边界条件和初始条件是很重要的，定解条件不同，求解的方法、解的性质等也会有很大的不同，有时甚至是本质的

不同。

✪ 例（P.161）

✪ 例 1 长为 l 的均匀弦，两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定，弦中张力为 T_0，在 $x=h$ 点，以横向力 F_0 拉弦，达到稳定后放手任其自由振动．写出初始条件．

解：设横向力 F_0 作用处弦的位移为（最大）C，则弦的初始位移为

$$u\Big|_{t=0}=\begin{cases}\frac{C}{h}x, & (0\le x\le h),\\ \frac{C}{l-h}(l-x), & (h\le x\le l).\end{cases}$$

在力 F_0 作用点处，所受力平衡，所以

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0$$

$$F_0-T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=0$$

因为是小振动,所以

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 \approx \alpha_1\ , \qquad \sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 \approx \alpha_2$$

$$\cos\alpha_1 \approx 1\ , \qquad \cos\alpha_2 \approx 1$$

代入力的平衡方程中，得

$$T_2 = T_1 = 0$$

$$F_0 = T_0\frac{C}{h} + T_0\frac{C}{l-h}$$

解得

$$C = \frac{F_0 h(l-h)}{T_0 l}$$

所以

$$u\big|_{t=0}\begin{cases}\frac{F_0(l-h)}{T_0 l}x\ , & (0 \le x \le h)\ ,\\ \frac{F_0 h}{T_0 l}(l-x)\ , & (h \le x \le l).\end{cases}$$

初始速度为

$$u\Big|_{t=0} = 0.$$

例 2 长为 l 的均匀杆两端受力 F_0 作用而纵振动. 写出边界条件.

解: 杆两端所受的拉力 F_0 等于这两端面所受的杨氏弹性力

$$YS\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0} = -YS\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -F_0\,,$$

$$YS\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = F_0.$$

$$YS\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=l} = YS\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = F_0\,.$$

例 3 长为 l 的均匀杆，两端有恒定热流进入，其强度为 q_0，写出这个热传导问题的边界条件.

解：在边界上有

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = q_n\,,$$

在 $x = l$ 端，

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=l} = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = q_n = -q_0\,,$$

即

$$k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = q_0\,.$$

在 $x = 0$ 端，

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0} = k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_n = -q_0\,,$$

即

$$k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -q_0\,.$$

例 4 习题1是否需要衔接条件？

解：弦在振动时，F_0 已不起作用，所以不需要衔接条件，若弦在振动时，力 F_0 仍然在起作用，就要衔接条件.

例 5 一根杆由横截面相同的两段连接而成，两段的材料不同，杨氏模量分别为 Y^I、Y^{II}，密度分别为 ρ^I、ρ^{II}，试写出衔接条件.

解：设两段杆的接点为 $x=0$，在连接处位移 u 是连续的，所以有

$$Y^I S\frac{\partial u^I}{\partial n}\Big|_{x=0} = Y^I S\frac{\partial u^I}{\partial x}\Big|_{x=0},$$

$$Y^{II} S\frac{\partial u^{II}}{\partial n}\Big|_{x=0} = Y^{II} S\frac{\partial u^{II}}{\partial x}\Big|_{x=0}.$$

这两力是作用力与反作用里，所以

$$Y^I S\frac{\partial u^I}{\partial x}\Big|_{x=0} = Y^{II} S\frac{\partial u^{II}}{\partial x}\Big|_{x=0}.$$

这就是衔接条件.

例 6 写出静电场中电介质表面的衔接条件.

解：在电介质表面，电势是连续的.

$$u^{I}\Big|_{x-0} = u^{II}\Big|_{x+0},$$

又电位移法向分量连续，

$$D = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

即

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u^{I}}{\partial x}\Big|_{x-0} = \varepsilon_2 \frac{\partial u^{II}}{\partial x}\Big|_{x+0}.$$

作业(No.15)

P. 161：1；2；3；5；6；7