§7.3 数学物理方程的分类

§7.1 的泛定方程，除杆的横振动方程以外，都是二阶的．本书将着重讨论二阶偏微分方程．

7.3.1 线性二阶偏微分方程

1. 二阶偏微分方程的定义

把所有自变数(包括空间坐标和时间坐标)依次记作 $x_1, x_2, \cdots, x_n$．二阶偏微分方程可以定义为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu + f = 0, \tag{7.3-1}$$

如果 a_{ij}, b_i, c, f 只是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数而与 u 无关，则称上式为二阶线性偏微分方程．§7.1 节导出的泛定方程以及许多常见的偏微

分方程都是线性的.

2. 线性齐次与非齐次方程

- 齐次方程：$f \equiv 0$.
- 非齐次方程：$f \neq 0$.

通常有源（外力、热源、电荷等）的方程为非齐次的，反之为齐次的，但也有例外，如扩散方程中当扩散源的强度与浓度成正比和放射性衰变中，分别有源和汇，但仍然是齐次的.

3. 叠加原理

如果泛定方程和定解条件都是线性的，则可以把定解问题的解看作几个部分的线性叠加，只要这些部分各自所满足的泛定方程和定解条件的相应的线性叠加正好是原来的泛定方程和定解条件. 这叫作叠加原理. 以后将经常引用叠加原理.

以下研究方程分类，并把各类方程分别化为标准形式．这样，只需讨论标准形式的方程的解法就行了．

7.3.2 线性二阶偏微分方程的分类和标准化

讨论两个变数 x 和 y 的二阶线性偏微分方程．两个变数的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \tag{7.3-2}$$

式中，$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 都是 x, y 的函数．

下面仅就 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 是实数的情况讨论．

1. 线性变换

作变数代换

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{7.3-3}$$

其 Yacobi 行列式 $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$. 为把式(7.3-2)变换为 ξ,η 的方程，作如下计算

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y. \end{cases} \tag{7.3-4}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi\xi_{xx}\right) + \left(u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta\eta_{xx}\right) \\ \qquad = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{xy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy}\right) + \left(u_{\eta\xi}\eta_y\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\eta\eta_{xy}\right) \\ \qquad = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi\xi_{yy}\right) + \left(u_{\eta\xi}\eta_y\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta\eta_{yy}\right) \\ \qquad = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{cases} \tag{7.3-5}$$

把式(7.3-4)和(7.3-5)代入式(7.3-2)中，得采用新变数 ξ 和 η 后的方程

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + Cu + F = 0. \tag{7.3-6}$$

式(7.3-6)中

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
A_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
A_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.\\
B_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y,\\
B_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y,\\
C &= c,\\
F &= f.
\end{aligned}
\tag{7.3-7}
$$

方程式(7.3-6)仍然是线性的.

由(7.3-7)如果取一阶偏微分方程

$$
a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0, \tag{7.3-8}
$$

的一个特解作为新自变数 ξ，则(7.3-7)中的第一式 $A_{11} = 0$.同理，如取(7.3-8)中的另一解作自变数 η，则(7.3-7)的第二式 $A_{22} = 0$. 如此

式(7.3-6)可进一步化简.

一阶偏微分方程的求解可化为常微分方程的解. 为此改写式(7.3-8)为

$$a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)+a_{22}=0. \tag{7.3-9}$$

如把

$$z(x,y)=\text{常数} \tag{7.3-10}$$

作为定义隐函数 $y(x)$ 的方程，则

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \quad =: \quad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial z_x}{\partial z_y},$$

因此，式(7.3-9)就是

$$a_{11}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2a_{12}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+a_{22}=0. \tag{7.3-11}$$

常微分方程(7.3-11)称为二阶线性偏微分方程(7.3-2)的特征方程，它的一般积分

$$\xi(x,y)=c_1,\quad \text{和} \quad \eta(x,y)=c_2$$

称为特征线.

由二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，得特征方程(7.3-11)的两个根为

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{7.3-12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{7.3-13}$$

通常以式(7.3-12)和(7.3-13)根号下符号划分偏微分方程(7.3-2)的类型：

$$\begin{cases} a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0, & \text{双曲型,} \\ a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, & \text{抛物型} \\ a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0, & \text{椭圆型} \end{cases}$$

由于方程式(7.3-2)的系数 a_{11}, a_{12}, a_{22} 可以是 x, y 的函数，所以方程式(7.3-2) 在自变数的某个区域内属于某一类型，在另一区域可能属于另一类型．用式(7.3-7)容易验证，作自变数代换时方程的类型不变：

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = \left(a_{11}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\right)^2$$

2. 方程的类型

(1). 双曲型方程

由于 $a_{11}^2 - a_{11}a_{22} > 0$，故式(7.3-12)和(7.3-13)各给出一族实特征线

$$\xi(x, y) = \text{常数}, \qquad \eta(x, y) = \text{常数}.$$

取

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y)$$

作为新的自变数，则 $A11 = 0, A_{22} = 0$，从而自变数自变数代换后方程式(7.3-6)变为

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{A_{12}}\left[B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu + F\right]. \tag{7.3-14}$$

再作自变数代换

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \beta, \\ \eta = \alpha - \beta. \end{cases} \quad \text{即,} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \end{cases}$$

则方程式(7.3-14)化为

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = -\frac{1}{A_{12}}\left[(B_1 + b_2)u_\alpha + (B_1 - B_2)u_\beta + 2Cu + 2F\right], \quad (7.3\text{-}15)$$

式(7.3-14)或(7.3-15)就是双曲型方程的标准形式．一维波动方程（弦的横振动、杆的纵振动、电报方程等）就是标准形式的双曲型方程。

(2). 抛物型方程

由于 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$，特征方程(7.3-12)和(7.3-13)变为同一个方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12}}{a_{11}}. \quad (7.3\text{-}16)$$

它只能给出一族实特征线

$$\xi(x, y) = \text{常数},$$

取 $\xi = \xi(x, y)$ 作为新的变数，取与 ξ 无关的函数 $\eta = \eta(x, y)$ 作为另一新的自变数，且使得 $\eta(x, y)$ 不满足方程(7.3-16)，则可以验证

式(7.3-7)中的系数 $A_{11} = 0, A_{12} = 0, A_{22} \neq 0$．因此，此代换后方程(7.3-6)变为

$$u_{\eta\eta} = -\frac{1}{A_{22}}\left[B_1 u_\xi + b_2 u_\xi + Cu + F\right]. \tag{7.3-17}$$

就是抛物型方程的标准形式．一维输运问题（扩散和热传导等）就是标准形式的抛物型方程．

(3)．椭圆型方程

由于 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$，故式(7.3-12)和(7.3-13)各给出一族复数特征线

$$\xi(x,y) = \text{常数}, \qquad \eta(x,y) = \text{常数},$$

而且 $\eta = \xi^*$．取 $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y) = \xi^*(x,y)$ 作为新的自变数，则式(7.3-6)中 $A_{11} = 0, A_{22} = 0$，从而自变数代换后方程(7.3-6)变为

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2A_{12}}\left[B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu + F\right]. \tag{7.3-18}$$

式(7.3-18)形式上与(7.3-14)相同，但实质上不同，因为此处的 ξ 和 η 是复变数．通常这是不方便的，为此再作自变数代换

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \mathrm{i}\beta, \\ \eta = \alpha - \mathrm{i}\beta, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \alpha = \mathrm{Re}\xi = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \\ \beta = \mathrm{Im}\xi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\xi - \eta). \end{cases}$$

则方程式(7.3-18)化为

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{A_{12}}\left[(B_1 + B_2)u_\alpha + \mathrm{i}(B_2 - B_1)u_\beta + 2Cu + 2F\right]. \quad (7.3\text{-}19)$$

式(7.3-18)或(7.3-19)就是椭圆型方程的标准形式．平面稳定场方程（稳定浓度分布、稳定温度分布、静电场方程、无旋稳定电流方程和无旋稳恒流动方程等），在二维情况下，都是式(7.3-19)形式的椭圆型方程．

7.3.3 多自变数方程的分类（不要求）

除自变数增加外，多自变数的情况类似于二自变数的情况，代换的过程、方法类似.

7.3.4 常系数线性方程

如果线性方程的系数都是常数，则按上述方法化成标准形式之后还可以进一步简化.

以传输线方程(7.1.12)或(7.1.13)

$$LCu_{tt} - u_{xx} + (LG + RC)u_t + RGu = 0 \tag{7.3-20}$$

为例说明化简的原理、方法和步骤. 试作变数代换

$$u(x,t) = e^{\lambda x + \mu t} v(x,t), \tag{7.3-21}$$

其中 λ, μ 为待定系数．于是

$$\begin{cases} u_x = e^{\lambda x+\mu t}(v_x + \lambda v), \\ u_t = e^{\lambda x+\mu t}(v_t + \mu v), \\ u_{xx} = e^{\lambda x+\mu t}(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v), \\ u_{tt} = e^{\lambda x+\mu t}(v_{tt} + 2\mu v_t + \mu^2 v). \end{cases} \tag{7.3-22}$$

将式(7.3-21)和(7.3-22)代入(7.3-20)中，并约去因子 $e^{\lambda x+\mu t}$，得

$$LCv_{tt} - v_{xx} - 2\lambda v_x + [2\mu LC + (LG + RC)]v_t$$
$$+[LC\mu^2 - \lambda^2 + \mu(LG + RC) + RG]v = 0.$$

如选取 $\lambda = 0, \mu = -(lG + RC)/2LC$，即

$$u(x,t) = e^{-\frac{LG+RC}{2LC}t}v(x,t),$$

则一阶偏导数项 v_x 和 v_t 消失，方程简化为

$$LCv_{tt} - v_{xx} - \frac{(LG - RC)^2}{4LC}v = 0. \tag{7.3-23}$$

7.3.5 把线性方程化为标准形式的步骤

- 计算 $a_{12}-a_{11}a_{22}$ 的值，由此确定方程的类型;
- 根据方程的类型，由特征方程的解给出的特征线（双曲型和椭圆型为二族，抛物型只有一族）$\xi(x,y)$ =常数，$\eta(x,y)$ =常数，构建新的自变数代换 $\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(x,y)$，使得采用新变数 ξ,η 的线性方程的系数 $A_{11}=0$（双曲型，抛物型，椭圆型），$A_{22}=0$（双曲型，椭圆型），$A_{12}=0$（抛物型），从而得到相应类型的标准方程．对双曲型方程和椭圆型方程还可以作进一步的变换：$\alpha=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\beta=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$（双曲型），$\alpha=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\beta=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\xi-\eta)$（椭圆型）．

7.3.6 把线性常系数方程进一步简化的步骤

- 作函数变换

$$u(x, t) = \mathrm{e}^{\lambda x+\mu t} v(x, t),$$

- 由变换式计算待简化方程的各阶偏导数，并代入待简化方程式中；
- 适当选择待定系数 λ, μ，使得 v_x, v_t 项消失，从而得到简化方程.

例

- 例 1 化简下列方程为标准形式（P.169，1(1)，1(2)）
- 1(1) $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0.$

解：因为 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2 - a^2 = 0$，所以该方程是抛物型的．其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{a}{a} = 1.$$

即只有一族实的特征线 $y - x =$ 常数．于是选取 $\xi = y - x, \eta = x$（或 $\eta = y$，总之，只要 η 与 ξ 无关就行，当然应该选择最简单的函数）作为新的变数，计算抛物型方程的标准形式

$$u_{\eta\eta} = -\frac{1}{A_{22}}\left[B_1 u_\xi + B - 2u_\eta + Cu + F\right]$$

的系数 B_1, B_2, A_{22}, C 和 F：

$$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = a + 2a \times 0 + a \times 0 = a,$$

$$B_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y = c - b,$$

$$B_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y = b,$$

$$C = c = 1,$$

$$F = f = 0.$$

所以

$$u_{\eta\eta} = -\frac{1}{a}\left[(c-b)u_\xi + bu_\eta + u\right],$$

或

$$u_{\eta\eta} + \frac{c-b}{a}u_\xi + \frac{b}{a}u_\eta + \frac{1}{a}u = 0.$$

1(2) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0.$

解：因为 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 1 \times (-3) = 4 > 0$，所以该方程是双曲型的．其特征方程的两根为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = -1 \pm 2 = \begin{cases} -3, \\ 1. \end{cases}$$

特征线为 $y + 3x = C_1$ 和 $y - x = C_2$．故可选择新的自变数 $\xi = y + 3x, y = y - x$ 变换原方程．同(1)有两种方法，其一是利用双曲

型方程的标准形式，并计算其系数（由一般变换的系数公式计算）；其二是由新的自变数代换，计算原方程中的各级偏导数，然后再代入原方程，实现简化的目的．以下以方法二处理．

$$\xi = y + 3x, \qquad \eta = y - x,$$

$$u_x = 3u_\xi - u_\eta, \qquad u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = 9u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = 9u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} - u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} = 3u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

代上式入原式并整理得，

$$4u_{\xi\eta} - 3u_\xi - u_\eta = 0.$$

此结论看似与书上的答案不同，实则是相同的．注意到书上的答案采用的变换为 $\xi = x - y, \eta = 3x + y$，为此作变换 $\alpha = -\eta, \beta = \xi$，则

$u_\xi = u_\beta, u_\eta = -u_\alpha, u_{\xi\eta} = -u_{\alpha\beta}$. 代入上面得到的标准方程得

$$4u_{\alpha\beta} - u_\alpha + 3u_\beta = 0.$$

改用符号 ξ, η 表示 α, β，有

$$4u_{\xi\eta} - u_\xi + 3u_\eta = 0.$$

其实此形式的方程可直接用代换 $\xi = x - y, \eta = 3x + y$ 得到.