§7.4 d'Alembert 公式 定解问题

对于常微分方程，我们可以先求出方程的通解，然后再利用附加条件（初始条件）确定通解中的积分常数.

对偏微分方程，一般很难求出其通解，但对于某些描述波或振动等问题的方程所构成的初值问题（或其它问题），往往可通过自变数代换而把方程化为可直接积分的形式，求出含有任意函数的通解，根据定解条件确定问题的解.

下面研究的正是这种情况.

7.4.1 d'Alembert 公式

我们考虑一根无限长弦的微小横振动问题（也可是杆的纵振动、

传输线方程等），即考虑如下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{7.4-1}$$

1. 通解

为将方程化为可直接积分的形式，试作自变量代换

$$\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \\ t = \frac{1}{2a}(\xi - \eta), \end{cases} \tag{7.4-2}$$

由复合函数求导法则，得

$$u_t = au_\xi - au_\eta, \qquad u_x = u + \xi + u_\eta,$$

$$u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - a^2 u_{\xi\eta} - a^2 u_{\eta\xi} + a^2 u_{\eta\eta} = a^2(u_{\xi\xi - 2u_{\xi\eta}} + u_{\eta\eta}),$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

代入式(7.4-1)中，得

$$u_{\xi\eta} = 0, \qquad \text{即} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0. \tag{7.4-3}$$

式(7.4-3)是可以直接积分的，首先对 η 积分，得

$$u_\xi = f(\xi)\text{—为任意二次连续可微函数.} \tag{7.4-4}$$

再对 ξ 积分，就得通解

$$\begin{aligned} u &= \int f(\xi)\mathrm{d}\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ &= f_1(x+at) + f_2(x-at). \end{aligned} \tag{7.4-5}$$

这就是方程(7.4-1)的通解，其中 f_1 和 f_2 是二次连续可微的任意函数（对常微分方程为任意常数）.

2. 函数 f_1 和 f_2 的确定

通解中的任意函数 f_1 和 f_2 可用定解条件（初始条件）确定．将

式(7.4-5)代入式(7.4-1) 的初始条件中，得

$$\begin{aligned} &f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),\\ &af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x), \end{aligned} \tag{7.4-6}$$

上式第二式两边对 x 积分，有

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+f_1(x_0)-f_2(x_0)$$

上式联合(7.4-6)的第一式，得

$$\begin{aligned} f_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)],\\ f_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)]. \end{aligned}$$

代此式入通解(7.4-5)中得定解问题的解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.4-7}$$

可以验证，如 $\varphi(x)$ 二次连续可微，$\psi(x)$ 一此连续可微，则式(7.4-7)确

实是定解问题的解．式(7.4-7)称为 d’Alembert 公式．

3. d’Alembert 公式的物理意义

$f_1(x+at)$ 表示以速度 a 向左传播的波—左行波

$f_2(x-at)$ 表示以速度 a 向右传播的波—右行波

d’Alembert 公式表明，定解问题(7.4-1)的解是由初值 φ 和 ψ 所确定的两种左、右行波 $\frac{1}{2}\varphi(x\pm at)$ 和 $\frac{1}{2a}\Psi(x\pm at)$（$\Psi(x)$ 是 $\psi(x)$ 的原函数，表示初速度 ψ 的累积效应）的传播的叠加．因此，又称 d’Alembert 行波法．

7.4.2 端点的反射—延拓法

对半无限长弦的振动（一般地半直线上的波动问题），d’Alembert 公式是否适用呢？

1. 引理

若 $\varphi(x), \psi(x)$ 是奇（偶、周期）函数，则初值问题(7.4-1)的解(7.4-7)也是 x 的奇（偶、周期）函数.

证明：我们仅对 $\varphi(x), \psi(x)$ 是奇函数的情况加以证明，其它两中情况的证明类似. 由于 $\varphi(x) = -\varphi(-x), \psi(x) = -\psi(-x)$，由式(7.4-7)，得

$$
\begin{aligned}
u(-x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi(-x + at) + \varphi(-x - at)] + \frac{1}{2}\int_{-x-at}^{-x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] - \frac{1}{2}\int_{x+at}^{x-at} \psi(-\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= -u(x, t).
\end{aligned}
$$

即 $u(x, t)$ 是 x 的奇函数.

利用此引理可以求解半直线上的问题.

2. 半无限长弦固定端点的自由振动

此问题归结为定解问题

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad (0 < x < \infty) \tag{7.4-8}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad (0 \le x < \infty) \tag{7.4-9}$$

$$u|_{x=0} = 0. \tag{7.4-10}$$

由于 $x = 0$ 处的端点固定，因此，当 $t > x/a$ 时，d'Alembert 公式中的 $\varphi(x - at)$ 和 $\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 不再有意义，公式也就不能直接使用.

我们可以把半无限长的弦当作某无线长的弦的 $x \ge 0$ 部分，但要求无限长弦在 $x = 0$ 处始终不动. 因此，振动位移必须是关于 x 的奇函数，初始位移和初始速度也应该是奇函数. 即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & (x \ge 0), \\ -\varphi(-x), & (x < 0); \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & (x \ge 0), \\ -\psi(-x), & (x < 0). \end{cases} \tag{7.4-11}$$

这样就可以使用 d'Alembert 公式求解了，其中 $x \ge 0$ 的部分就是所研

究的半无限长弦的解.

通常用"延拓"一词描述这一方法：把 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 从半无界区间 $x \geq 0$ 奇延拓到整个空间，分别成为 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$.

由 d'Alembert 公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

得

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] \\ \quad + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t \leq \frac{x}{a} \quad \text{or} \quad x \geq at \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(-x+at)] \\ \quad + \frac{1}{2a}\int_{-x+at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t \geq \frac{x}{a} \quad \text{or} \quad 0 \leq x \leq at. \end{cases} \tag{7.4-12}$$

物理意义：由于端点固定，从行波的角度看，初始振动向左、右传播时，其左行波行进到 $x = 0$ 处将产生反射波，当 $t < \frac{x}{a}$ 时，反射波还未传到 x 处，所以结果与无界弦相同；当 $t > \frac{x}{a}$ 时，反射波已经传到 x 处，此时反射波和相位跟入射波相位相反，出现半波损失.

利用直线上初值问题求解半直线上问题的方法称为对称延拓法. 由于奇（偶）函数的导数仍然是奇（偶）函数，所以利用对初值偶延拓，同样可以类似地求第二类边界条件 $u_x|_{x=0} = 0$ 的半无限问题.

3. 端点自由的半无限长（弦）杆的自由振动

略，见P.175—177.

7.4.3 定解问题是一个整体

从偏微分方程(7.4-1)解出达朗贝尔公式(7.4-7)的过程，与读者所熟悉的常微分方程的求解过程是完全类似的.

但是，很可惜，绝大多数偏微分方程很难求出通解；即使已求得通解，用定解条件确定其中待定函数往往更加困难.

在本章的开头已指出，从物理的角度来说，问题的完整提法是在给定的定解条件下求解数学物理方程．现在我们要指出，除了d'Alembert 公式一类极少的例外，从数学的角度来说，不可能先求偏微分方程的通解然后再考虑定解条件，必须同时考虑偏微分方程和定解条件以进行求解.

这样，不管从物理上说还是从数学上说，定解问题是一个整体.

7.4.4 定解问题的适定性

定解问题来自实际、它的解答也应回到实际中去．为此，应当要求定解问题

- 有解；

- 其解是唯一的；
- 解是稳定的．

解的存在性和唯一性这两个要求明白易懂．至于第三个要求即稳定性说的是如果定解条件的数值有细微的改变，解的数值也只作细微的改变．

为什么要求稳定呢？由于测量不可能绝对精密，来自实际的定解条件不免带有细微的误差，如果解不是稳定的，那么它就很可能与实际情况相去甚远，没有价值．

定解问题如果满足以上三个条件，就称为适定的．非适定的定解问题应当修改其提法，使其成为适定的．

容易验证，在初值问题中，如果初始位移 $\varphi(x)$ 和初始速度 $\psi(x)$ 分别是具有二阶和一阶连续可导的函数，则其解一定存在、唯一且稳定．

例

例 1 求解无限长弦的自由振动，设弦的初始位移为 $\varphi(x)$，初始速度为 $-a\varphi'(x)$.

解：定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & -\infty < x < +\infty, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t\big|_{t=0} = -a\varphi'(x). \end{cases}$$

这是一个一维无界空间的问题，根据 d'Alembert 公式，有

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

将初始位移和初始速度代入上式，得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} -a\varphi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] - \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\varphi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] - \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2}\varphi(x-at)$$
$$= \varphi(x-at)\,.$$

波只朝一个方向（x 正向）传播，是一列行波.

例 2 半无限长弦的初始位移和初始速度都是零，端点作微小振动 $u\big|_{x=0} = A\sin\omega t$．求解弦的振动．

解：对于 $x \ge at$，显然有 $u(x,t) = 0$．下面研究 $t > \frac{x}{a}$，将初始条件延拓到 $x < 0$ 的半无界区域后，定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, & -\infty < x < \infty\,, \\ u(0,t) = A\sin\omega t\,, & \\ u(x,0) = \Phi\begin{cases} 0\,, & x \ge 0\,, \\ \varphi(x)\,, & 0 < x\,, \end{cases} & u(x,0) = \Psi\begin{cases} 0\,, & x \ge 0\,, \\ \psi(x)\,, & x < 0\,, \end{cases} \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是待定函数．

将 d'Alembert 公式用于延拓后的无界弦，有

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

且令其满足边界条件，得

$$A\sin\omega t = \frac{1}{2}[0+\varphi(-at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{0}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ ,$$

$$A\sin\omega t = \frac{1}{2}\varphi(-at) + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{0}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ ,$$

记 at 为 x，则

$$A\sin\omega\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\varphi(-x) + \frac{1}{2a}\int_{-x}^{0}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ ,$$

显然，若取 $\varphi(x) = 2A\sin\left(-\frac{\omega}{a}x\right)$，$\psi(x) = 0$，则

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\varphi(x-at) = A\sin\left[-\frac{\omega}{a}(x-at)\right] \\ &= A\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)\ . \qquad\qquad \left(t>\frac{x}{a}\right)\ . \end{aligned}$$

作业(No.16)
P. 179：1，8

END