

第八章 分离变数(Fourier级数)法

行波法一般用来求解无界区域上的定解问题（如初值问题），对于有限区域上的定解问题—混合问题或边值问题，本章介绍另一种求解方法—分离变量法。它的基本思想是将偏微分方程的问题转化为常微分方程的问题，先从中求出一些满足边界条件的特解，然后利用叠加原理，作出这些解的线性组合，令其满足余下的定解条件，从而得到定解问题的解。

§8.1 齐次方程的分离变数法

8.1.1 齐次方程、齐次边界条件的分离变数法

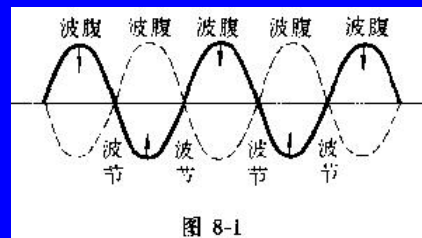
以两端固定弦的自由振动为例，具体说明分离变数法的基本思想和步骤．定解问题为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (8.1-1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad (8.1-2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (0 < x < l). \quad (8.1-3)$$

两端固定的弦上的振动引起的波在端点将反射，从而形成驻波，根据驻波的特点，可将振动相位变化和振幅的变化分别用 $T(t)$ 和 $X(x)$ 表示．即其解具有分离变数的形式



$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (8.1-4)$$

代式(8.1-4)入式(8.1-1)和(8.1-2), 得

$$XT'' - a^2 X''T = 0, \quad (8.1-5)$$

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0, \\ X(l)T(t) = 0. \end{cases} \quad (8.1-6)$$

为了得到非零解, $T(t) \neq 0$, 所以得到与其次边界条件相应的结论

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (8.1-7)$$

由式(8.1-5)得

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

由此可把原问题分解为关于 X 和 T 的常微分方程,

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0; \end{cases} \quad (8.1-8)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \quad (8.1-9)$$

1. 先求解 X

▮▮▮ 当 $\lambda < 0$ 时

式(8.1-12)的解为

$$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

积分常数 C_1 和 C_2 由边界条件确定.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0, \end{cases} \longrightarrow C_1 = -C_2 = 0.$$

因此 $X(x) = 0 \longrightarrow u(x, t) = 0$ 无意义, 故 $\lambda \neq 0$.

▮▮▮ 当 $\lambda = 0$ 时

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

由边界条件, 得

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0, \end{cases} \longrightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

同理无意义, $\lambda = 0$ 也应排除.

▮▮▮► 当 $\lambda > 0$ 时

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

同理,

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi,$$

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.1-10)$$

此时

$$X(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad C_2 \text{ 是任意常数.} \quad (8.1-11)$$

由此可见, 分离变量是引入的常数 λ 不能为负或零, 也不能取任意正数, 而必须取(8.1-10)给出的特定值——本征值, 相应的解称为本征

解. 相应的方程(8.1-12)和边界条件(8.1-7) 构成本征问题. 式(8.1-12)即

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0; \end{cases}$$

2. 求 T

方程(8.1-9)现在写为

$$T'' + a^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} T = 0.$$

其解为

$$T(t) = A \cos \frac{n\pi at}{l} + B \sin \frac{n\pi at}{l}. \quad (8.1-12)$$

式中 A, B 是积分常数.

将式(8.1-11)和(8.1-12)代入式(8.1-4), 得分离变数形式解

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (8.1-13)$$

n 为正整数. 每一个 n 对应于一种驻波—称为两端固定弦的本征振动. 由此得, $x = kl/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), 共 $n+1$ 个节点, 同样有 n 个波腹点. 相邻节点距离 $\frac{l}{n} = \text{半波长}$: 波长 $= \frac{2l}{n}$, 本征振动圆频率 $\omega = \frac{n\pi a}{l}$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{na}{2l}$.

式(8.1-13)可改写为

$$u_n(x, t) = D_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos(\omega_n t - \theta_n),$$

$$D_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad \theta_n = \operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}.$$

可见, 在任意时刻 $t = t_0$, 波的形状是一正弦曲线; 任一点 $x = x_0$, 都以相同的圆频率 ω_n 、初相位 θ_n 作谐振动, 不同的点振幅不同. 有限长弦的自由振动是由一系列驻波叠加而成的, 每一驻波的波形由特征函数确定, 频率由特征值确定. 因此, 分离变数法又称驻波法.

由此可解释弦乐器的演奏. $n = 1$ 是, $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 称为基音(频), ω_n ($n \geq 2$) 称为泛音(频), 相应的振动称为基振动和次谐

振动. 基音决定了音调, 而泛音决定了音色. 不同的了器有不同的泛音, 即音色. 通过改变弦长 l 、调整弦中张力 T 、使用不同粗细的弦 (ρ) 等来改变频率, 从而演奏出美妙动听的音乐.

上式是满足泛定方程和边界条件的线性独立的特解, 由于泛定方程和边界条件是线性的, 本征振动的线性组合就是泛定方程和边界条件的一般解, 即

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (8.1-14)$$

式中的任意常数 A_n, B_n 由初始条件确定:

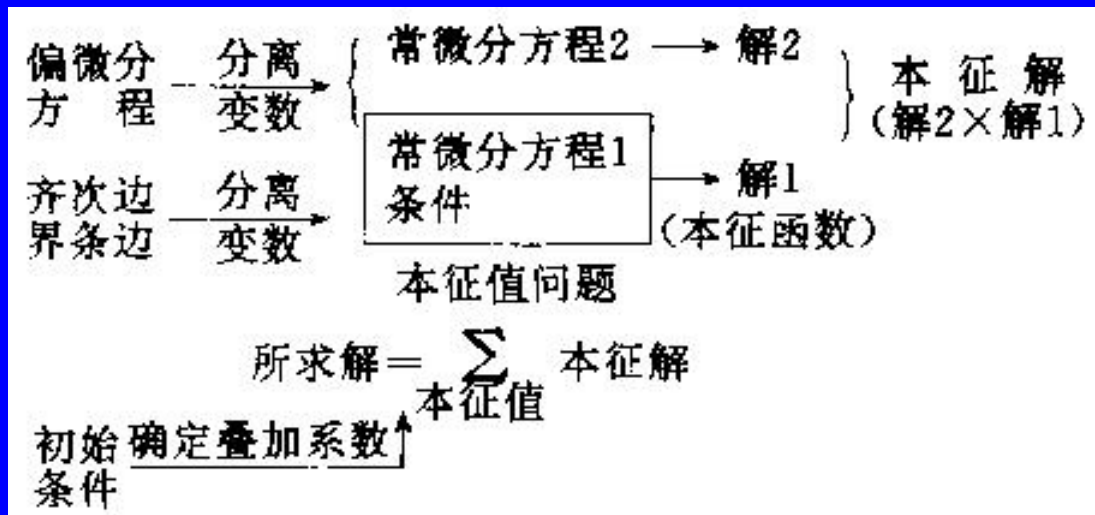
$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x). \end{cases} \quad (0 < x < l) \quad (8.1-15)$$

将式中的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 展开为 Fourier 正弦级数, 得

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi, \\ B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi. \end{cases} \quad (8.1-16)$$

(8.1-14)就是定解问题(8.1-1)—(8.1-3)的解. 其系数 A_n 和 B_n 有初始条件确定. (8.1-14)刚好就是 Fourier 正弦级数, 这是由第一类齐次边界条件(8.1-2)所决定的.

可将上述分离变数法图示为



分析上述过程可知，对于线性齐次方程和线性齐次边界条件的定解问题，可用分离变数的方法求解。

虽然分离变数法得到的解是无穷级数，但是具体问题中，级数只有前若干项是重要的。

8.1.2 分离变数法的应用举例

对第一类齐次边界条件，上面已经建立了其解，现在讨论第二类齐次边界条件的定解问题.

★ 例 1 求解两端自由的杆的自由纵振动问题，其定解问题为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (8.1-17)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad (8.1-18)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (0 < x < l). \quad (8.1-19)$$

解：设分离变数形式的试探解为

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (8.1-20)$$

代入泛定方程(8.1-17)和边界条件(8.1-18)，得

$$XT'' - a^2 X''T = 0, \quad (8.1-21)$$

$$X'(0)T(t) = 0, \quad X'(l)T(t) = 0. \quad (8.1-22)$$

为了得到非零有意义的解, 边界条件(8.1-22)只能为

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (8.1-23)$$

对泛定方程(8.1-21), 两边除以 a^2XT 得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X},$$

上式两边相等是不可能的, 除非两边相等且等于同一常数, 记为 $-\lambda$, 有

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

这可分离为关于 X 和 T 的常微分方程, 前者附带有条件(8.1-23), 即

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8.1-24)$$

$$X'(0) = X'(l) = 0;$$

和

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \quad (8.1-25)$$

现在讨论本征值问题(8.1-24)和(8.1-23)的解.

▣▣▣▣▶ 当 $\lambda < 0$ 时

此时只能得到无意义的零解 $X(x) \equiv 0$.

▣▣▣▣▶ 当 $\lambda = 0$ 时

$$X(x) = C_0 + D_0 x,$$

代入边界条件(8.1-23), 得 $D_0 = 0$,

$$X(x) = C_0, \quad C_0 \text{ 为任意常数.}$$

▣▣▣▣▶ 当 $\lambda > 0$ 时

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

代入条件(8.1-23), 得

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda} C_2 = 0, \\ \sqrt{\lambda} (-C_1 \sin \sqrt{\lambda} l + C_2 \cos \sqrt{\lambda} l) = 0. \end{cases}$$

其有意义的解只能在如下情况下去得

$$\begin{cases} C_2 = 0, & C_1 \neq 0, \\ \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases}$$

所以, 本征值和本征函数分别为

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$X(x) = C_1 \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots.$$

合并 $\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 两种情况后, 本征值和本征函数分别为

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.1-26)$$

$$X(x) = C_1 \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (8.1-27)$$

可见, 本征值问题(8.1-24)和(8.1-23)的本征函数(8.1-27)正好是 Fourier 余弦基本函数系.

把本征值(8.1-26)代入关于时间的常微分方程(8.1-25), 得

$$T'' = 0, \quad \lambda = 0; \quad T'' + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} T = 0, \quad \lambda > 0.$$

其解为

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t, \quad (8.1-28)$$

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.1-29)$$

式中 A_0, B_0, A_n, B_n 均为任意常数.

将式(8.1-27)、(8.1-28)和(8.1-29)代入(8.1-20), 得本征解—本征振动

$$\begin{cases} u_0(x, t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (8.1-30)$$

一般解是上述本征解的叠加, 即

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (8.1-31)$$

其中系数由初始条件(8.1-19)确定:

$$\begin{cases} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \\ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \cos \frac{n\pi}{l} x = \psi(x). \end{cases} \quad (0 \leq x \leq l)$$

由 Fourier 级数展开, 得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) d\xi, \\ B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(\xi) d\xi; \end{cases} \quad \begin{cases} A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \\ B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi. \end{cases} \quad (8.1-32)$$

解(8.1-31)中的 $A_0 + B_0 t$ 描写杆的整体移动, 其余部分才真正描写杆的纵振动. 从(8.1-32)知 A_0 与 B_0 分别等于平均初始位移和平均初始速度. 由于不受外力作用, 杆以不变的速度 B_0 移动. 解(8.1-31)正是傅里叶余弦级数. 这是在 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的第二类齐次边界条件(8.1-18)决定的.

下一个例子是一端为第一类齐次边界条件，另一端为第二类齐次边界条件，即混合边界条件的例子.

★ 例 2 研究细杆导热问题. 初始时刻杆的一端温度为零度，另一端温度为 u_0 ，杆上温度梯度均匀，零度的一端保持温度不变，另一端跟外界绝热. 试求细杆上温度的变化.

解：杆上温度 $u(x, t)$ 满足下列泛定方程和定解条件

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad a^2 = k/c\rho, \quad (8.1-33)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \\ u_x|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (8.1-34)$$

$$u|_{t=0} = u_0 x/l, \quad 0 < x < l. \quad (8.1-35)$$

设分离变数形式的试探解为

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (8.1-36)$$

代入泛定方程(8.1-33)和边界条件(8.1-34)，得关于 $X(x)$ 的常微分方程

和条件及关于 $T(t)$ 的常微分方程:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8.1-37)$$

$$X(0) = X'(l) = 0, \quad (8.1-38)$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0. \quad (8.1-39)$$

方程式(8.1-37)和条件(8.1-38)构成关于 $X(x)$ 的本征值问题. 容易验证, 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda < 0$ 时, 只能得到无意的解 $X(x) \equiv 0$, 当 $\lambda > 0$ 是, 方程(8.1-37)的解为

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

代入条件(8.1-38), 确定系数 C_1 和 C_2 , 即

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

仅在如下情况下才能得到有意义的非零解:

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0,$$

$$\cos \sqrt{\lambda}l = 0,$$

所以本征值和本征函数

$$\lambda = \frac{(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} = \frac{(2k + 1)^2 \pi^2}{4l^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (8.1-40)$$

$$X(x) = C_2 \sin \frac{(2k + 1)\pi}{2l} x, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (8.1-41)$$

将本征值代入关于 $T(t)$ 的方程(8.1-39), 有

$$T' + a^2 \frac{(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} T = 0.$$

其解为

$$T(t) = C e^{-\frac{(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}. \quad (8.1-42)$$

本例的本征函数(8.1-41)即 $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2l}x$ 既不同于第一类齐次边界条件的 $\sin \frac{n\pi}{l}x$, 又不同于第二类齐次边界条件的 $\cos \frac{n\pi}{l}x$.

其实边界条件 $u_x|_{x=l} = 0$ 表明, 可以把导热杆从区间 $(0, l)$ 偶延拓

到 $(0, 2l)$ 上. 偶延拓后的边界条件是 $u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0, u|_{x=2l} = 0$.

第一和三个条件决定了本征函数是 $\sin \frac{n\pi}{2l}x$, $n = 1, 2, \dots$, 第二个条件限制了 n 只能取奇数值, 因为

$$\left(\sin \frac{n\pi}{2l}x \right)' \Big|_{x=l} = \frac{n\pi}{2l} \cos \frac{n\pi}{2l} = 0,$$

如果 n 取偶数, 则上式不可能为零. 因此本征函数取(8.1-41)的形式.

这样, 这样一来此问题的一般解应为

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{\frac{(k+\frac{1}{2})^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(k+\frac{1}{2}) \pi x}{l}. \quad (8.1-43)$$

由初始条件(8.1-35)即可确定式中的任意常数 C_k .

$$C_k = (-1)^k \frac{2u_0}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}. \quad (8.1-44)$$

所以

$$u(x, t) = \frac{2u_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} e^{-\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi x}{l}. \quad (8.1-45)$$

讨论

此问题的边界条件是第一和第二类的混合，之所以仍然展开为 Fourier 正弦级数，是因为可把导热问题偶延拓到 $(0, 2l)$ 区间，此时边界条件为 $u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0, u|_{x=2l} = 0$ ，这正是第一类边界条件，故应作 Fourier 正弦级数展开. $u_x|_{x=l} = 0$ 决定了 k 只能取奇数.

当 $t < 0$ 时，级数解是发散的，无意义. 这是因为我们可以由某时刻的 $u(x, t)$ 分布推算任意此时刻以后任意时刻的温度分布，但不能相反.

当 $t > 0$ 时，级数收敛很快. 当 $t > 0.18l^2/a^2$ ($k = 1$) 时，仅保留

$k = 0$ 的项, 其误差不超过 1%.

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2 a^2}{4l^2} t} \sin \frac{\pi}{2l} x.$$

★ 例 3 散热片的横截面为矩形(图8-2). 它的一边 $y = b$ 处于较高温 U , 其他三边 $y = 0, x = 0$ 和 $x = a$ 则处于冷却介质中因而保持较低的温度 u_0 . 求解这横截面上的稳定温度分布 $u(x, y)$, 即定解问题

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (8.1-46)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u_0, \quad 0 < y < b, \quad (8.1-47)$$

$$u|_{y=0} = u_0, \quad u|_{y=b} = U, \quad 0 < x < a. \quad (8.1-48)$$

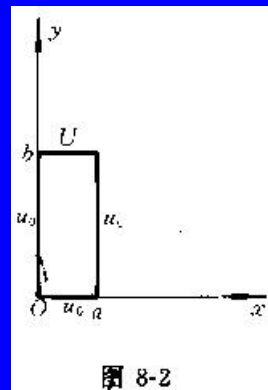


图 8-2

解: 这是二维 Laplace 方程的第一类边界值问题. 由于不含初始条件, Laplace 方程的边界条件不可能全是齐次的, 因为这种条件下的解只能是零. 但是, 尽可能把一些边界条件化为齐次, 毕竟会带来一

些方便. 常用的办法是把 $u(x, y)$ 分解为 $v(x, y)$ 和 $w(x, y)$ 的线性叠加,

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

代如定解问题并选取各有一组齐次的边界条件, 得

$$v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

$$w_{xx} + w_{yy} = 0,$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=a} = u_0,$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=a} = 0,$$

$$v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0;$$

$$w|_{y=0} = u_0, \quad w|_{y=b} = u_0.$$

很容易验证, 把 v 和 w 的泛定方程叠加起来确是 u 的泛定方程, 把 v 和 w 的边界条件叠加起来确是 u 的边界条件. 于是, 问题转化为求解 v 和 w , 而 v 和 w 各有两个齐次边界条件, 足以构成本征值问题, 不难分别解出. 其实, 本例还有一个特殊的简便方法, 就是令

$$u(x, y) = u_0 + v(x, y), \tag{8.1-49}$$

这只不过是把温标移动一下, 把原来的 u_0 作为新温标 $v(x, y)$ 的零

点. 以(8.1-49)代入(8.1-46)—(8.1-48), 得

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad (8.1-50)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=a} = 0, \quad (8.1-51)$$

$$v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=b} = U - u_0. \quad (8.1-52)$$

以分离变数形式的试探解

$$v(x, y) = X(x)Y(y)$$

代入泛定方程(8.1-50)和齐次边界条件(8.1-51), 可得 X 和 Y 的常微分方程以及 X 的边界条件:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(a) = 0; \end{cases} \quad (8.1-53)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \quad (8.1-54)$$

(8.1-53)构成本征值问题. 不难解得本征值 (与第一类齐次边界条件下

的自由振动相同)

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.1-55)$$

和本征函数

$$X(x) = C \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.1-56)$$

将本征值(8.1-55)代入关于 Y 的方程(8.1-54), 解得

$$Y(y) = A e^{\frac{n\pi}{a}y} + B e^{-\frac{n\pi}{a}y}.$$

这样, 分离变数形式的解—本征解为

$$v_n(x, y) = \left(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right) \sin \frac{n\pi}{a}x.$$

一般解 $v(x, y)$ 应是这些本征解的叠加,

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right) \sin \frac{n\pi}{a}x. \quad (8.1-57)$$

为确定系数 A_n 和 B_n , 以(8.1-57)代入非齐次边界条件(8.1-52),

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi}{a} x = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x = U - u_0. \end{cases}$$

把右边展开为 Fourier 正弦级数. 然后比较两边系数, 即得

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0, \\ A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = \begin{cases} 0, & n = \text{偶数}, \\ \frac{a}{n\pi} (U - u_0), & n = \text{奇数}. \end{cases} \end{cases}$$

由此解出

$$A_n = -B_n = \begin{cases} 0, & n = \text{偶数}, \\ \frac{a(U - u_0)}{n\pi \left(e^{\frac{n\pi b}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}} \right)}, & n = \text{奇数}. \end{cases}$$

于是，得到答案

$$u(x, y) = u_0 + \frac{a(U - u_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \times \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi b}{a}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}.$$

下一个例题是平面极坐标系的分离变数法.

★ 例 4 带电的云跟大地之间的静电场近似是匀强静电场，其电场强度 $\vec{E}_0$ 是竖直的. 水平架设的输电线处在这个静电场之中(图8—3a). 输电线是导体圆柱. 柱面由于静电感应出现感应电荷，圆柱邻近的静电场也就不再是匀强的了. 不过，离圆柱“无限远”处的静电场仍保持为匀强的. 现在研究导体圆柱怎样改变匀强静电场.

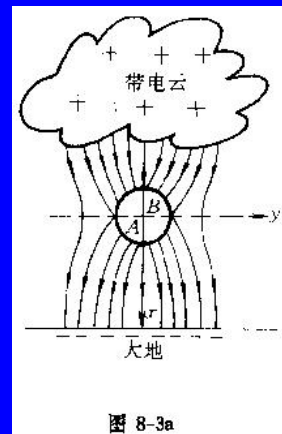


图 8-3a

首先需要把这个物理问题表为定解问题. 取圆柱的轴为 z 轴. 如果圆柱“无限长”，那么，这个静电场的电场强度、电势显然跟 z 无

关，我们只需在心平面上加以研究就够了。图8—3a画的正是 xy 平面上的静电场，圆柱面在 xy 平面的剖口是圆 $x^2 + y^2 = a^2$ ，其中 a 是圆柱的半径。

柱外的空间中没有电荷，所以电势“满足二维的 Laplace 方程。导体中的电荷既然不再移动，这说明导体中各处电势相同。又因为电势只具有相对的意义，完全可以把导体的电势当作零，从而了写出定解问题

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

在圆柱外,

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = 0.$$

按照分离变数法，以 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ 代入 Laplace 方程固然不难把它分解为两个常微分方程，但代入上述边界条件却只能得到

$$X(x)Y(\sqrt{a^2 - x^2}) = 0.$$

不能分解为 $X(x)$ 或 $Y(y)$ 的边界条件。事实上，既然边界是圆，直角

坐标系显然是不适当的, 必须采用平面极坐标系.

在极坐标系下, 定解问题改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \rho > a, \quad (8.1-58)$$

$$u|_{\rho=a} = 0. \quad (8.1-59)$$

在“无限远”处的静电场仍然保持为匀强的 $\vec{E}_0$. 由于选取了 x 轴平行于 $\vec{E}_0$, 所以在无限远处, $E_y = 0, E_x = E_0$, 即 $-\partial u / \partial x = E_0$, 亦即 $u = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \varphi$. 因而还有一个非齐次的边界条件

$$u|_{\rho \rightarrow \infty} \sim -E_0 \rho \cos \varphi. \quad (8.1-60)$$

所以完整的定解问题由(8.1-58)—(8.1-60)构成.

以分离变数形式的试探解

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入 Laplace 方程(8.1-58), 得

$$\frac{1}{R}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)=-\frac{1}{\Phi}\Phi''.$$

上式左边是 ρ 的函数, 与 φ 无关; 右边是 φ 的函数, 与 ρ 无关. 两边不可能相等, 除非两边实际上是同一个常数. 把这常数记作 λ ,

$$-\frac{1}{\Phi}\Phi''=\frac{1}{R}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)=\lambda.$$

这就分解为两个常微分方程

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{8.1-61}$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0. \tag{8.1-62}$$

常微分方程(8.1-61)隐含着一个附加条件. 事实上, 一个确定地点的极角可以加减 2π 的整倍数, 而电势 u 在确定的地点应具确定数值, 所以 $u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$, 即 $R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, 即

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \quad \text{自然周期条件} \tag{8.1-63}$$

常微分方程(8.1-61)与条件(8.1-63)构成本征值问题. 不难求得方程(8.1-61)的解为

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi, & \lambda > 0, \\ A + B\varphi, & \lambda = 0, \\ Ae^{\sqrt{\lambda}\varphi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\varphi}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (8.1-64)$$

仅当 $\lambda \geq 0$ 时, 能得有意义的解. 从而, 求得本征值和本征函数

$$\lambda = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.1-65)$$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} A \cos m\varphi + B \sin m\varphi, & m \neq 0, \\ A, & m = 0 \end{cases} \quad (8.1-66)$$

以本征值(8.1-65)代入关于 R 的常微分方程(8.1-62),

$$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0. \quad (8.1-67)$$

这是 Euler 型常微分方程, 作代换 $\rho = e^t$, 即 $t = \ln \rho$ 方程化为

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - m^2 R = 0.$$

其解为

$$R(t) = \begin{cases} Ce^{mt} + De^{-mt} = C\rho^m + D\rho^{-m}, & m \neq 0, \\ C + Dt = C + D \ln \rho, & m = 0. \end{cases}$$

这样, 分离变数形式的解—本征解是

$$u_0(\rho, \varphi) = C_0 + D_0 \ln \rho,$$

$$u_m(\rho, \varphi) = \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) + \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi).$$

Laplace 方程是线性的, 它的一般解应是所有本征解的叠加, 即

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) = & C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) \end{aligned} \quad (8.1-68)$$

为确定(8.1-68)中的系数, 把(8.1-68)代入边界条件. 先代入齐次

边界条件(8.1-59),

$$C_0 + D_0 \ln a + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)$$

一个 Fourier 级数等于零, 意味着所有 Fourier 系数为零, 即

$$C_0 + D_0 \ln a = 0, a^m A_m + a^{-m} C_m = 0, a^m B_m + a^{-m} D_m = 0.$$

由此得

$$C_0 = -D_0 \ln a, C_m = -A_m a^{2m}, D_m = -B_m a^{2m}. \quad (8.1-69)$$

再研究非齐次的边界条件(8.1-60), 这里着重研究 u 的主要部分. 对于很大的 ρ , (8.1-68) 中的 $C_0 + D_0 \ln \rho$ 和 ρ^{-m} 项远远小于 ρ^m 项而可

略去. 因此, 以(8.1-68)代入(8.1-60)的结果是

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \sim -E_0 \rho \cos \varphi. \quad (8.1-70)$$

既然主要部分是 ρ^1 项, 可见在(8.1-70)中不应出现 $\rho^m (m > 1)$ 的项(否则 ρ^m 项就成了主要部分). 这是说,

$$A_m = 0, \quad B_m = 0. \quad m > 1$$

就 ρ^1 项而论. 从(8.1-70)知

$$A_1 = -E_0, \quad B_1 = 0.$$

从而, $C_1 = -A_1 a^2 = E_0 a^2$, $C_m = 0$, ($m > 1$), $D_m = 0$, ($m \geq 1$).

最后得柱外的静电势为

$$u(\rho, \varphi) = D_0 \ln \frac{\rho}{a} - E_0 \rho \cos \varphi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \varphi. \quad (8.1-71)$$

简单谈谈所得解答(8.1-71)的物理含义. 当中一项, 即 $-E_0 \rho \cos \varphi$ 正是原来的匀强静电场中的电势分布. 最后一项, 即 $E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \varphi$ 对于

大的 ρ 可以忽略, 所以它代表在圆柱邻近对匀强电场的修正, 这自然是柱面感应电荷的影响. 此外, 还有 $D_0 \ln \frac{\rho}{a}$ 项, 它的系数 D_0 又是任意常数, 这表明解答(8.1-71)包含着某个不确定的因素. 从物理上检查, 这个不确定因素就在于问题提出时根本没有说明导体柱原来所带的电量, 可见 $D_0 \ln \frac{\rho}{a}$ 正是圆柱原来所带电量的影响(从静电学知道, $D_0 \ln \frac{\rho}{a}$ 正是均匀带电圆柱体周围的静电场中的电势).

☕ 讨论设圆柱体原来并不带电, 从而 $D_0 = 0$, (8.1-70)这时只含两项

$$u(\rho, \varphi) = -E_0 \rho \cos \varphi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \varphi. \quad (8.1-72)$$

在图8—3a的 A 点和 B 点的电场强度是

$$E = -\frac{\partial u}{\partial \rho} \bigg|_{\substack{\rho=a \\ \varphi=0,\pi}} = \left(E_0 \cos \varphi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \varphi \right) \bigg|_{\substack{\rho=a \\ \varphi=0,\pi}} = \pm 2E_0,$$

是原来的匀强电场的两倍! 所以在这两处特别容易击穿. 而且不管圆柱的半径多么小, 这个结论总是对的!



在图8—3a的 y 轴上的电势是

$$u \Big|_{\varphi=\pm\pi/2} = \left(-E_0\rho \cos \varphi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \varphi \right) \Big|_{\varphi=\pm\pi/2} = 0,$$

跟导体圆柱的电势相同. 图8—3a的 y 轴实际上代表三维空间里的 yz 平面, 因此 yz 平面的电势跟导体圆柱的电势相同. 既然导体圆柱跟 yz 平面电势相同, 如果让导体圆柱的两侧沿 yz 平面伸出两翼(图8—3b), 静电场并不改变, 电势分布仍然是(8.1-72).

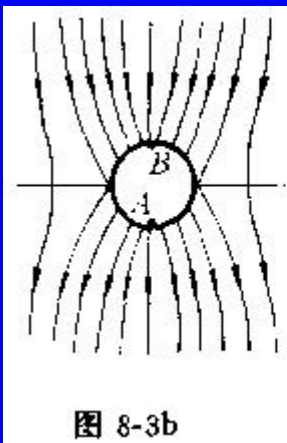


图 8-3b

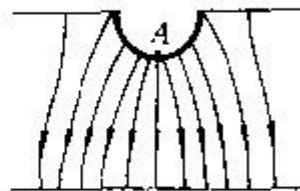


图 8-3c

要是只看带翼圆柱体的下方(图8—3b的下半幅, 亦即图8—3C, 那么这可以说是平行板电容器两极板之间的静电场, 只是上极板带有半圆柱形突起. 如果远离突起的电场强度是 E_0 , 则突起最高处的电场强度总是 E_0 的两倍. 对于高压电容器来说, 这容易导致击穿, 因此高压电容器的极板必须刨得非常平滑.

下一个例子是所谓“没有初始条件的问题”.

★ 例 5 长为 l 的理想传轴线, 一端 $x = 0$ 接于交流电源, 其电动势为 $v_0 \sin \omega t$, 另一端 $x = l$ 是开路. 求解线上的稳恒电振荡.

“稳恒电振荡”是什么意思? 原来, 理想传输线是一种理想化的模型, 实际上总是存在损耗, 所以初始条件所引起的自由振荡总是逐渐衰减. 经过交流电的许多周期之后, 自由振荡衰减殆尽. 这时的电振荡完全是交流电源引起的. 交流电源提供的能量正好补偿了损耗, 所以这种振荡得以维持一定的幅度而无衰减, 这就是所谓稳恒电振荡.

★ 解既然初始条件所引起的自由振荡已衰减殆尽，在这种问题中当然不必考虑初始条件。因此，这里求解的是没有初始条件的问题。

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad a^2 = 1/LC, \quad (8.1-73)$$

$$v|_{x=0} = v_0 e^{i\omega t}, \quad (8.1-74)$$

$$j|_{x=l} = 0. \quad (8.1-75)$$

为了计算的简便，在边界条件(8.1-74)中， $v_0 \sin \omega t$ 即 $\text{Im}(v_0 e^{i\omega t})$ 改写成了 $v_0 e^{i\omega t}$ 。这样作是可以的，由于方程和边界条件都是线性的，我们只要取最后结果的虚部就行了。

稳恒振荡完全由交流电源引起，所以周期必与交流电源相同，故表及里

$$v(x, t) = X(x) e^{i\omega t}. \quad (8.1-76)$$

以下部分忽略 (P.199—201) .

作业(No.17)

P. 201: 2, 3, 5, 11, 13, 15, 17
