§8.2 非齐次振动方程和输运方程

上一节研究了齐次方程的定解问题. 本节要研究非齐次振动方程和输运方程的定解问题.

我们仍然限于齐次的边界条件. 关于非齐次边界条件的处理请看 § 8.3.

本节先介绍 Fourier 级数法，它直接求解非齐次方程的定解问题. 接着是冲量定理法，它把非齐次方程的定解问题转化为齐次方程的定解问题然后求解.

8.2.1 Fourier 级数法

对于齐次泛定方程，上节讨论了三类齐次边界条件的定解问题：❶ 第一类齐次边界条件；❷ 第二类齐次边界条件；❸ 第一和第二

类齐次边界条件的混合. 其本征值和本征函数分别为:

$$\text{第一类:}\quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\text{第二类:}\quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x) = C_n \cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\text{混合类:}\quad \lambda = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{(2l)^2},\quad X_n(x) = C_n \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x,\quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

它们的解分别是以三个特征函数为函数系的 Fourier 级数展开式，其系数由初始条件确定.

上述分离变数法得出的这些结果提示我们：不妨把所求的解本身展开为 Fourier 级数，即

$$u(x, t) = \sum_n T_n(t)X_n(x). \tag{8.2-1}$$

Fourier 级数(8.2-1)的基本函数族 $X_n(x)$ 为该定解问题齐次方程在所给齐次边界条件下的本征函数.

由于解是自变数 x 和 t 的函数，因而 $u(x,t)$ 的 Fourier 系数不是常数，而是时间 t 的函数，把它记作了 $T_n(t)$．将待定解(8.2-1)代入泛定方程，尝试分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程，然后求解．

8.2.2 应用举例

✪ 例 1 求解定解问题

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t, \tag{8.2-2}$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \tag{8.2-3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0 < x < l. \tag{8.2-4}$$

✪ 解：级数展开的基本函数应是相应的齐次泛定方程在第二类齐次边界条件下的本征函数 $\cos\frac{n\pi}{l}x$．这样，试把所求的解展开为 Fourier 余

弦级数

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

为了求解 $T_n(t)$，尝试把这个级数代入泛定方程(8.2-2)，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right]\cos\frac{n\pi x}{l} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t.$$

左边是 Fourier 余弦级数，这提示我们把右边也展开为 Fourier 余弦级数．其实，右边已经是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=1$ 的项．于是，比较两边的系数，分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程

$$T_1'' + \frac{\pi^2a^2}{l^2}T_1 = A\sin\omega t, \qquad T_n'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n = 0, \quad n\neq 1.$$

又把 $u(x,t)$ 的 Fourier 余弦级数代入初始条件，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{n\pi}{l}x, \tag{8.2-5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)\cos\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n\cos\frac{n\pi}{l}x. \tag{8.2-6}$$

其中 φ_n 和 ψ_n 的 Fourier 余弦级数［以 $\cos(n\pi x/l)$ 为基本函数族］的第 n 个 Fourier 系数．等式(8.2-5)、(8.2-6)两边都是 Fourier 余弦级数．由于基本函数族 $\cos(n\pi x/l)$ 的正交性，等式两边对应同一基本函数的 Fourier 系数必然相等，于是得 $T_n(t)$ 的非零值初始条件

$$\begin{cases} T_0(0) = \varphi_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \\ T_0'(0) = \psi_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi)\mathrm{d}\xi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n(0) = \varphi_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi, \\ T_0'(0) = \psi_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi. \end{cases} \quad n \neq 0. \tag{8.2-7}$$

$T_n(t)$ 的常微分方程在初始条件(8.2-7)下的解是

$$T_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t, \tag{8.2-8}$$

$$T_1(t) = \frac{Al}{\pi a} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \pi^2 a^2/l^2} \left(\omega \sin \frac{\pi a t}{l} - \frac{\pi a}{l} \sin \omega t \right) + \varphi_1 \cos \frac{\pi a t}{l} + \frac{l}{\pi a} \psi_1 \sin \frac{\pi a t}{l}, \tag{8.2-9}$$

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + \frac{l}{n\pi a} \psi_n \sin \frac{n\pi a t}{l}, \qquad n \neq 0, 1. \tag{8.2-10}$$

(8.2-9)的第一项为了 $T_1(t)$ 的非齐次常微分方程的特解，满足零值韧始条件．(8.2-9)的后两项之和及(8.2-10)分别为 $T_1(t)$ 和 $T_n(t)$ $(n \neq 0, 1)$ 的齐次常微分方程的解，满足非零值初始条件(8.2-7)．

这样，所求的解是

$$u(x, t) = \frac{Al}{\pi a} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \pi^2 a^2/l^2} \left(\omega \sin \frac{n\pi t}{l} - \frac{\pi a}{l} \sin \omega t \right) \cos \frac{\pi x}{l} + \varphi_0 +$$

$$\psi_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + \frac{l}{n\pi a}\psi_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}. \quad (8.2\text{-}11)$$

尝试成功了．这个方法叫做 Fourier 级数法．很明显，这个方法的关键在于分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程，其中不可混杂着另一自变数 x，这是怎样做到的呢？原来，这个级数展开的基本函数 $\cos(n\pi x/l)$ 正是相应齐次方程、齐次边界条件下用分离变数法求得的本征函数，这才得以分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程．

齐次振动方程和齐次输运方程问题当然也可以用 Fourier 级数法(结合分离变数法)求解，这时得到的 $T_n(t)$ 的常微分方程为齐次方程，求解更容易．请用这样的方法重新求解上节的定解问题(8.1-1)——(8.1-3) 以及例 1 和例 2，这里就不赘述了。

综上所述，可以看出，对于振动和输运问题，不论齐次还是非齐次方程的定解问题，Fourier 级数法结合分离变数法均可应用．如仅

用分离变数法，则只能用于齐次方程定解问题.

8.2.3 冲量定理法 *

1. 定理

定解问题（非齐次输运和振动方程、齐次边界条件和零初始条件）：

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \qquad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

的解是满足如下齐次泛定方程、齐次边界条件的定解问题

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad v_t - a^2 v_{xx} = 0,$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \qquad v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0,$$

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau), \qquad v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau).$$

的解 $v(x,t)$ 的叠加（积分）：

$$u(x,t) = \int_0^{\tau} v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau.$$

$v(x,t)$ 所满足的定解问题可用前面的分离变数法或 Fourier 级数法求解．只是要注意，前面两种方法中初始时刻为零时刻，这里初始时刻为 τ 时刻，因此前二方法解中的 t (表示距初始时刻 0 时刻的时间间隔)，在这里应换成 $t-\tau$.

✪ 例 2 将例 1 中的初始条件改为零值，用冲量定理法求解，即

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t,$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \qquad 0 < x < l.$$

✪ 解：应用冲量定理法，先求解定解问题

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0,$$

$$v_x\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=l} = 0,$$

$$v\big|_{t=\tau+0} = 0, \quad v_t\big|_{t=\tau+0} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau, \qquad 0 < x < l.$$

参照边界条件，试把解。展开为 Fourier 余弦级数

⋮

以下略（P.211～212）.