§8.3 非齐次边界条件的处理

在§8.1和§8.2两节中，不管是齐次还是非齐次振动方程和输运方程，它们的定解问题的解法都有一个前提：边界条件是齐次的.

但是，在实际问题中，常有非齐次边界条件出现，那么，这样的定解问题又如何求解呢？由于定解问题是线性的，处理的原则是利用叠加原理，把非齐次边界条件问题转化为另一未知函数的齐次边界条件问题．下面举例说明.

8.3.1 一般方法

例 1 自由振动问题

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{8.3-1}$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t), \tag{8.3-2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{8.3-3}$$

边界条件(8.3-2)是非齐次的．选取一个函数 $v(x,t)$，使其满足非齐次边界条件(8.3-2)，为了简单起见，不妨取 $v(x,t)$ 为 x 的线性函数，即

$$v(x,t) = A(t)x + B(t). \tag{8.3-4}$$

将式(8.3-4)代入(8.3-2)，解得

$$v(x,t) = \frac{\left[\nu(t) - \mu(t)\right]}{l}x + \mu(t). \tag{8.3-5}$$

利用叠加原理，令

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{8.3-6}$$

将(8.3-5)、(8.3-6)代入定解问题(8.3-1)～(8.3-3)，得 $w(x,t)$ 的定解问题

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = -v_{tt} + a^2 v_{xx} = -\left[\mu''(t) - \nu''(t)\right] - \mu''(t), \tag{8.3-7}$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0, \tag{8.3-8}$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0} = \varphi(x) + \frac{1}{l}\left[\mu(0) - \nu(0)\right] - \mu(0),$$

$$w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0} = \psi(x) + \frac{1}{l}\left[\mu'(0) - \nu'(0)\right] - \mu'(0). \tag{8.3-9}$$

虽然 $w(x,t)$ 的方程(8.3-7)一般是非齐次的，但是，定解问题(8.3-7)～(8.3-9)具有齐次边界条件，可按 § 8.2 求解．

需要特别指出，$x=0$ 和 $x=l$ 两端都是第二类非齐次边界条件 $w_x|_{x=0}=\mu(t), w_x|_{x=l}=\nu(t)$ 的情况．如果仍按(8.3-4)取 x 的线性函数作为 v，则代入非齐次边界条件得

$$v_x|_{x=0}=A(t)=\mu(t),\quad v_x|_{x=l}=A(t)=\nu(t).$$

除非 $\mu(t)=\nu(t)$，否则这两式互相矛盾．这时不妨改试

$$v(x,t)=A(t)x^2+B(t)x. \qquad (8.3\text{-}10)$$

8.3.2 特殊处理方法

✪ 例 2 弦的 $x=0$ 端固定，$x=l$ 端受迫作谐振动 $A\sin\omega x$，弦的初始位移和初始速度都是零，求弦的振动．这个定解问题是

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < l \tag{8.3-11}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = A\sin\omega x, \tag{8.3-12}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \tag{8.3-13}$$

$x = l$ 端为非齐次边界条件.

如果按上述一般处理方法，应取 $v(x,t) = (A\sin\omega t/l)x$，但是，相应的 $w(x,t)$ 的定解问题中泛定方程为 $w_{tt} - a^2 w_{xx} = -(v_{tt} - a^2_{xx}) = (A\omega^2 x/l)\sin\omega t$，是非齐次方程，求解麻烦. 能否有较为简便的方法呢?

由于求解的是弦在 $x = l$ 端受迫作谐振动 $\sin\omega t$ 情况下的振动，它一定有一个特解 $v(x,t)$，满足齐次方程(8.3-11)、非齐次边界条件(8.3-12)，且跟 $x = l$ 端同步振动，即其时间部分的函数亦为 $\sin\omega t$，就是说，特解具有分离变数的形式

$$v(x,t) = X(x)\sin\omega t. \tag{8.3-14}$$

将式(8.3-14)代入(8.3-11)、(8.3-12)，得

$$X'' + \left(\frac{\omega^2}{a}\right) X = 0, \tag{8.3-15}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = A. \tag{8.3-16}$$

将常微分方程(8.3-15)的解 $X(x) = C\cos(\omega x/a) + D\sin(\omega x/a)$ 代入(8.3-16)，由此确定 $X(x) = [A/\sin(\omega l/a)]\sin(\omega x/a)$，从而

$$v(x,t) = \frac{A}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t. \tag{8.3-17}$$

于是令

$$u(x,t) = v(x,y) + w(x,t), \tag{8.3-18}$$

将式(8.3-17)、(8.3-18)代入(8.3-11)～(8.3-13)，得 $w(x,t$ 的定解问题

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = -\left(v_{tt} - a^2 v_{xx}\right) = 0, \tag{8.3-19}$$

$$w|_{x=0},\quad w|_{x=l}=0, \tag{8.3-20}$$

$$w|_{t=0}=0,\quad w_t|_{t=0}=-A\omega\frac{\sin\omega x/a}{\sin\omega l/a}. \tag{8.3-21}$$

定解问题(8.3-19)～(8.3-21)为齐次方程、齐次边界条件，可用分离变效法求解，其一般解由(8.1-14)给出，因此，

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中系数 A_n 和 B_n 可按(8.1-16)计算，得

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l -A\omega\frac{\sin(\omega\xi/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{-2A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left[-\frac{\sin(\omega/a+n\pi/l)\xi}{2(\omega/a+n\pi/l)}+\frac{\sin(\omega/a-n\pi/l)\xi}{2(\omega/a-n\pi/l)}\right]_0^l \\ &= \frac{A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left[\frac{\sin(\omega l/a+n\pi)}{\omega/a+n\pi/l}-\frac{(\sin\omega l/a-n\pi)}{\omega/a-n\pi/l}\right] \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \frac{2A\omega}{n\pi a} \cdot \left[\frac{1}{\omega/a + n\pi/l} - \frac{1}{\omega/a - n\pi/l} \right]$$

$$= (-1)^n \frac{2A\omega}{al} \cdot \frac{1}{\omega^2/a^2 - n^2\pi^2/l^2}.$$

因此

$$w(x,t) = \frac{2A\omega}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2/a^2 - n^2\pi^2/l^2} \sin\frac{n\pi at}{l} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$u(x,t) = A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)} \sin\omega t + \frac{2A\omega}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2/a^2 - n^2\pi^2/l^2} \sin\frac{n\pi at}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$