# §8.4 Poisson 方程

**Poisson 方程**

$$\Delta u = f(x, y, z)$$

**可说是非齐次的 Laplace 方程，它与时间无关，显然不适用冲量定理法．**

**我们可以采用特解法．先不管边界条件，任取这 Poisson 方程的一个特解 $v$，然后令 $u = v + w$．这就把问题转化为求解 $w$，而 $\Delta w = \Delta u - \Delta v = \Delta u - f = 0$，这不再是 Poisson 方程而是 Poisson 方程．在一定边界条件下求解 Poisson 方程是 § 8.1 研究过的问题．**

**例 1 在圆域 $\rho < \rho_0$ 上求解 Poisson 方程的边值问题**

$$\Delta u = a + b(x^2 - y^2).$$

$$u|_{\rho=\rho_0} = c.$$

解：先设法找 Poisson 方程的一个特解．显然，$\Delta\left(ay^2/2\right) = a$，为对称起见，取 $a(x^2 + y^2)/4$．$\Delta(bx^4/12) = bx^2$，$\Delta(by^4/12) = by^2$．这样，找到一个特解

$$v = \frac{a}{4}(x^2 + y^2) + \frac{b}{12}(x^4 - y^4) = \frac{a}{4}\rho^2 + \frac{b}{12}(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$
$$= \frac{a}{4}\rho^2 + \frac{b}{12}\rho^4 \cos 2\varphi.$$

令

$$u = v + w = \frac{a}{4}\rho^2 + \frac{b}{12}\rho^4 \cos 2\varphi + w.$$

就把问题转化为 $w$ 的定解问题，

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \\ w|_{\rho=\rho_0} = c - \dfrac{a}{4}\rho^2 - \dfrac{b}{12}\rho^4 \cos 2\varphi. \end{cases}$$

**在极坐标系中用分离变数法求解 Laplace 方程的一般结果参见(8.1-68)，即**

$$w(\rho,\varphi) = C_0 + D_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi).$$

$w$ **在圆内应当处处有限．但上式的** $\ln\rho$ **和** $\rho^{-m}$ **在圆心为无限大，所以应当排除，就是说，** $D_0 = 0, C_m = 0, D_m = 0$．**于是，**

$$w(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi).$$

**把上式代入边界条件，**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) = c - \frac{a}{4}\rho_0^2 - \frac{b}{12}\rho_0^4 \cos 2\varphi.$$

比较两边系数，得

$$A_0 = c - \frac{a}{4}\rho_0^2, \quad A_2 = -\frac{b}{12}\rho_0^2, \quad A_m = 0, \quad m \neq 0, 2; \quad b_m = 0.$$

最后的所求解

$$u = v + w = c + \frac{a}{4}(\rho^2 - \rho_0^2) + \frac{b}{12}\rho^2(\rho^2 - \rho_0^2)\cos 2\varphi.$$

✪ 例 2 在矩形域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 上求解 Poisson 方程的边值问题

$$\Delta_3 u = -2,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, \tag{8.4-1}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0. \tag{8.4-2}$$

✪ 解：先找 Poisson 方程的一个特解．显然 $v = -x^2$ 满足 $\Delta v = -2$．其实，$v = -x^2 + c_1 x + c_2$ ($c_1$ 和 $c_2$ 是两个积分常数)也满足 $\Delta v = -2$．我们打算选择适当的 $c_1$ 和 $c_2$，使 $v$ 满足齐次边界条件(8.4-1)．容易看

出，$c_1 = a, c_2 = 0$．这样，

$$v(x, y) = x(a - x).$$

令

$$u(x, y) = v + w = x(a - x) + w(x, y),$$

把上式代入 $u$ 的定解问题，就把它转化为 $w$ 的定解问题

$$\Delta w = 0, \tag{8.4-3}$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=a} = 0, \tag{8.4-4}$$

$$w|_{y=0} = w|_{y=a} = x(x - a). \tag{8.4-5}$$

此定解问题可仿照 § 8.1 例 3 求解．（以下略，P.221～222）