# §8.5 小结

在掌握了❶分离变数法、❷Fourier 级数法、❸冲量定理法和❹ 非齐次边界条件的处理方法以后，就能求解最一般的有界问题：泛定方程和边界条件全是非齐次的，同时，初始条件是非零值．作为本章的小结，下面以一般的一维有界振动问题和二维有界稳定温度分布问题为例，说明含时问题(波动和输运问题)和不含时问题(稳定场问题)不同的求解步骤和最有效的解法．

## 8.5.1 一般的有界波动和输运问题

以有界弦的一船振动问题为例，其定解问题是

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{8.5-1}$$

$$u|_{x=0} = \nu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t), \tag{8.5-2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{8.5-3}$$

**弦既受外力作用，又有一定的初始位移和初始速度，而且弦的两个端点位置还按已知规律随时间变化，因此，振动方程和边界条件都是非齐次的，初始条件是非零值．不过，方程、边界条件和初始条件都是线性的，叠加原理适用，前述解法和非齐次边界条件的处理方法均可应用．为了方便、有效，可采用如下求解步骤：**

**1. 边界条件齐次化**

**取 $v(x,t)$ 满足非齐次边界条件(8.5-2)，例如**

$$v(x,t)=\frac{1}{l}\left[\nu(t)-\mu(t)\right]x+\mu(t).$$

**令**

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

**代入定解问题(8.5-1)～(8.5-3)，得 $w(x,t)$ 的定解问题**

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=f(x,t)-v_{tt}\equiv g(x,t),$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0,$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0} \equiv \Phi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0} \equiv \Psi(x).$$

边界条件已是齐次，这定解问题可用 Fourier 级数法直接求解(见 § 8.2 例 1 )．但是，这将导致求解时间函数 $T_n(t)$ 的二阶非齐次常系数常微分方程，且初值条件 $T_n(0), T_n'(0)$ 不为零．不如利用叠加原理，化成两个定解问题，分别用分离变效法和冲量定理法直接求解，见下面(2)．

**2. 利用叠加原理化成两个简单的定解问题**

令

$$w(x,t) = w^I(x,t) + w^{II}(x,t),$$

$w^I(x,t)$ 和 $w^{II}(x,t)$ 分别满足定解问题

$$w^I_{tt} - a^2 w^I_{xx} = 0, \qquad w^{II}_{tt} - a^2 w^{II}_{xx} = g(x,t),$$

$$w^I|_{x=0} = w^I|_{x=a} = 0, \qquad w^{II}|_{x=0} = w^{II}|_{x=l} = 0,$$

$$w^I|_{t=0} = \Phi(x), \quad w_t^I|_{t=0} = \Psi(x), \qquad w^{II}|_{t=0} = w_t^{II}|_{t=0} = 0.$$

$w^I$ 的定解问题为齐次方程、齐次边界条件，可用分离变效法求解；而$w^{II}$ 的定解问题仅方程是非齐次的，可用冲量定理法（或 Fourier 级数法）求解.

对于一般的一维有界输运问题，例如定解问题

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),$$

$$u|_{x=0} = \nu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

其求解步聚跟上述振动问题完全相同，首先利用叠加原理将边界条件齐次化.

对于二维、三维的有界波动和输运问题的求解也可仿此进行.

## 8.5.2 一维的有界稳定场问题

今以二维矩形域稳定温度分布问题为例，其定解问题是

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \tag{8.5-4}$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=a} = \nu(t),$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=b} = \psi(x).$$

稳定分布问题与时间 $t$ 无关，求解步骤跟含时的波动和输运问题不同，首先处理的不是非齐次边界条件，而是非齐次方程．虽然这里两组边界条件都是非齐次的，但上节的特解法在这里仍然适用．其求解步骤是:

**1. 利用特解法，将非齐次方程化为齐次方程问题**

取非齐次方程(8.5-4)的一个特解 $v(x, y)$，有 $v_{xx} + v_{yy} = f(x, y)$．令

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

于是 $w(x,y)$ 满足定解问题

$$w_{xx} + w_{yy} = 0, \tag{8.5-5}$$

$$w|_{x=0} = \mu(y) - v(0,y), \quad w|_{x=a} = \nu(x) - v(a,y),$$

$$w|_{y=0}\varphi(x) - v(x,0), \quad w|_{y=b} = \psi(x) - v(x,b).$$

2. 利用叠加原理，化成两个可直接求解的定解问题

令

$$w(x,y) = w^{I}(x,y) + w^{II}(x,y),$$

$w^{I}(x,y)$ 和 $w^{II}(x,y)$ 等定解问题分别是

$$w^{I}_{xx} + w^{I}_{yy} = 0,$$

$$w^{I}|_{x=0} = w^{I}|_{x=a} = 0,$$

$$w^{I}|_{y=0} = \varphi(x) - v(x,0), \quad w^{I}|_{y=b} = \psi(x) - v(x,b),$$

$$w^{II}_{xx} + w^{II}_{yy} = 0,$$

$$w^{II}|_{x=0} = \mu(y) - v(0, y), \quad w^{II}|_{x=a} = \nu(y) - v(a, y),$$

$$w^{II}|_{y=0} = w^{II}|_{y=b} = 0.$$

**这两个定解问题都是齐次方程和一组非齐次边界条件．可用分离变效法或 Fourier 级数法直接求解．**

**本章研究的全是定义在有界区域的定解问题，且可用分离变数(Fourier 级致)法求解，容易使人产生误解，似乎任何有界的线性的定解问题都能用分离变效法求解，其实不是这样．例如，下列并不很复杂的变系数的线性偏微分方程**

$$u_{tt} - a^2 x u_{xx} = 0, \tag{8.5-6}$$

$$u_{tt} - a^2 t u_{xx} = 0, \tag{8.5-7}$$

$$u_{tt} - a^2 (x + t) u_{xx} = 0. \tag{8.5-8}$$

**(8.5-6)、(8.5-7)是可以分离变数的，而(8.5-8)就不能分离变数．这其实不难理解，因为方程(8.5-8)根本不存在分离变数形式的解**

$u(x,t) = X(x)T(t)$. 自然，分离变数法对它不适用.

至于无界区域的定解问题，将在第十二、十三、十四章讨论.