第九章 二阶常微分方程级数解法 本征值问题

上一章的分离变效法是对直角坐标系的各种定解问题和平面极坐标系稳定场问题进行的，出现的本征函数都是三角函数．但实际问题中的边界是多种多样的，坐标系必须参照问题中的边界形状来选择，不可能总是直角坐标系或平面极坐标系．

圆球形和圆柱形就是两种常见的边界，相应地用球（极）坐标系和柱坐标系比较方便．本章要考察球坐标系和柱坐标系中的分离变数法所导致的常微分方程以及相应的本征值问题．

§9.1 特殊函数常微分方程

9.1.1 Laplace 方程 $\Delta u = 0$

1. 球（极）坐标系

球坐标系下 Laplace 算符 Δ 的表达式可在微积分学教本中找到，从而得 Laplace 方程在球坐标系中的表达式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \tag{9.1-1}$$

首先，尝试把表示距离的变数 r 跟表示方向的变数 θ 和 φ 分离，以

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$$

代入(9.1-1)，得

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0.$$

用 r^2/RY 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{-1}{\sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}.$$

左边是 r 的函数，跟 θ 和 φ 无关；右边是 θ 和 φ 的函数，跟 r 无关. 两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数. 通常把这个常数记作 $l(l+1)$，

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{\sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = l(l+1).$$

由此得两个分离变数形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - l(l+1)R = 0, \tag{9.1-2}$$

$$\frac{1}{\sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y = 0, \tag{9.1-3}$$

常微分方程(9.1-2)可改写为

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - l(l+1)R = 0,$$

正是 Euler 型常微分方程，它的解是

$$R(r) = Cr^{l} + Dr^{-(l+1)}. \tag{9.1-4}$$

偏微分方程(9.1-3)叫作<u>球函数方程</u>.

进一步分离变数，以

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

代入球函数方程(9.1-3)，得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\varphi^2} + l(l+1)\Theta\Phi = 0.$$

用 $\sin^2\theta/\Theta\Phi$ 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}.$$

左边是 θ 的函数，跟 φ 无关；右边是 φ 的函数，跟 θ 无关．两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数．把这个常数记作

λ,

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\lambda.$$

由此得两个分离变数形式的常微分方程

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{9.1-5}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)\sin^2\theta-\lambda\right]\Theta=0. \tag{9.1-6}$$

常微分方程(9.1-5)往往还有一个没有写出来的“自然的周期条件” $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$（参看 § 8.1 例 4 ）. 常微分方程(9.1-5)和自然的周期条件构成本征值问题. 本征值是

$$\lambda=m^2, \qquad m=0,1,2,3,\cdots, \tag{9.1-7}$$

本征函数是

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi, \qquad m=0,1,2,3,\cdots. \tag{9.1-8}$$

再看常微分方程(9.1-6). 根据(9.1-7)，应把(9.1-6)改写为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0. \qquad (9.1\text{-}9)$$

通常用

$$\theta=\arc\cos x, \qquad \text{即} \quad x=\cos\theta,$$

把自变数从 θ 换为 x (x 只是代表 $\cos\theta$，并不是直角坐标)，则

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right].$$

方程(9.1-9)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0, \qquad (9.1\text{-}10)$$

即

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0. \qquad (9.1\text{-}11)$$

这叫作 l 阶（m 级）连带 Legendre 方程．其 $m=0$ 的特例，即

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}+l(l+1)\Theta=0, \tag{9.1-12}$$

则叫作 l 阶 Legendre 方程．

关于 Legendre 方程和连带 Legendre 方程的求解见 § 9.2 和 § 10.2．在那里将要看到， Legendre 方程和连带 Legendre 方程往往隐含着在 $x=\pm1$ (即 $\theta=0,\pi$)的“自然边界条件”并构成本征值问题，决定了 l 只能取整数值．

2. 柱坐标系

柱坐标系 Laplace 算符 Δ 的表达式同样可在微积分学教本中找到，从而得 Laplace 方程在柱坐标系中的表达式

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0. \tag{9.1-13}$$

以分离变数的形式解

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

代入(9.1-13)，得

$$\Phi Z\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{Z\Phi}{\rho^2}\frac{dR}{\mathrm{d}\rho}+\frac{RZ}{\rho^2}\Phi''+R\Phi Z''=0.$$

用 $\rho^2/R\Phi Z$ 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi'}{\Phi}.$$

左边是 ρ 和 z 的函数，跟 φ 无关；右边是 φ 的函数，跟 ρ 和 z 无关．两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数．把这个常数记作 λ，

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi'}{\Phi}=\lambda.$$

由此得分离变数形式的两个常微分方程

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{9.1-14}$$

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=\lambda. \tag{9.1-15}$$

常微分方程(9.1-14)和没有写出来的自然的周期条件

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$$

构成本征值问题. 本征值和本征函数是

$$\lambda=m^2, \qquad m=0,1,2,3,\cdots, \tag{9.1-16}$$

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi, \qquad m=0,1,2,3,\cdots. \tag{9.1-17}$$

至于方程(9.1-15)，以(9.1-16)代入，用 $1/\rho^2$ 遍乘各项，并适当移项得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{z}=-\mu.$$

这就分解为两个常微分方程:

$$Z''-\mu Z=0, \tag{9.1-18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0. \tag{9.1-19}$$

下面分三种情况讨论（$\mu = 0, \mu > 0, mu < 0$）.

$\mu = 0$

方程式(9.1-19)是 Euler 方程，方程(9.1-18)和(9.1-19)的解是

$$Z = C + Dz^m; \tag{9.1-20}$$

$$R = \begin{cases} E + F\ln\rho, & m = 0, \\ E\rho^m + F\rho^{-m}, & m \neq 0. \end{cases} \tag{9.1-21}$$

$\mu > 0$

对于方程(9.1-19)，此时常作代换

$$x = \sqrt{\mu}\rho,$$

把自变数从 ρ 变换为 x（注意 x 只代表 $\sqrt{\mu}\rho$，并非直角坐标），则

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho} = \sqrt{\mu}\frac{dR}{dx},$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{\mu}\frac{dr}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}\right)\frac{dx}{d\rho} = \mu\frac{d^2R}{dx^2},$$

方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0, \tag{9.1-22}$$

即

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2+m^2)R=0.$$

称为 m 阶 Bessel 方程.

以后(§ 11.2)将要看到，Bessel 方程附加以 $\rho=\rho_0$ 处(即半径为 ρ_0的圆柱的侧面) 的齐次边界条件构成本征值问题，决定 μ 的可能数值(本征值).

这时方程(9.1-18)的解是

$$Z(z)=C\mathrm{e}^{\sqrt{\mu}z}+D\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}z}. \tag{9.1-23}$$

➡ $\mu<0$

记 $-\mu = \nu^2 > 0$，则方程(9.1-18)成为

$$Z'' + \nu^2 Z = 0,$$

其解为

$$Z(z) = C\cos\nu z + D\sin\nu z. \tag{9.1-24}$$

我们知道，若对此附加以 $z = z_1$ 和 $z = z_2$ 处(即柱体的上下底面)的齐次边界条件，便构成本征值问题，决定 ν 的可能数值，从而决定 ν^2 的可能数值(本征值)，至于方程(9.1-19)，以 $\mu = -\nu^2$ 代入，并作代换

$$x = \nu\rho,$$

则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0, \tag{9.1-25}$$

即

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - (x^2 + m^2)R = 0.$$

称为 m 阶虚宗量 Bessel 方程．事实上，如把 Bessel 方程(9.1-22)的宗量 x 改成虚数 ix，就成了(9.1-25)．虚宗量 Bessel 方程的求解见 § 9.4．

9.1.2 波动方程

考察三维波动方程

$$U_{tt} - a^2\Delta u = 0. \tag{9.1-26}$$

分离时间变数和空间变数 $\vec{r}$，以

$$u(\vec{r}, t) = T(t)v(\vec{r}) \tag{9.1-27}$$

代入式(9.1-26)，得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{\Delta v}{v} = -k^2.$$

由此得两个分离变数形似的常微分方程

$$T'' + k^2a^2T = 0, \tag{9.1-28}$$

$$\Delta v + k^2 v = 0. \tag{9.1-29}$$

常微分方程(9.1-28)的解为

$$\begin{cases} T(t) = C\cos kat + D\sin kat \text{ or } Ce^{ikat} + De^{-ikat}, & k \neq 0, \\ T(t) = C + Dt, & k = 0. \end{cases} \tag{9.1-30}$$

偏微分方程(9.1-29)叫作 Helmholtz 方程，或仍叫作"波动方程". Helmholtz 方程下面还要继续讨论.

9.1.3 输运方程

考察三维输运方程

$$u_t - a^2\Delta u = 0, \tag{9.1-31}$$

把分离变数形式的解

$$y(\vec{r}, t) = T(t)v(\vec{r}) \tag{9.1-32}$$

代入(9.1-31)，得

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{\Delta v}{v} = -k^2.$$

由此得两个分离变数形式的常微分方程

$$T' + k^2a^2T = 0, \tag{9.1-33}$$

$$\Delta v + k^2v = 0. \tag{9.1-34}$$

常微分方程(9.1-33)的解为

$$T(t) = Ce^{-k^2a^2t}. \tag{9.1-35}$$

偏微分方程(9.1-34)也是 Helmholtz 方程，下面就继续讨论 Helmholtz 方程.

9.1.4 Helmholtz 方程

1. 球坐标系

利用球坐标系 Laplace 算符 Δ 的表达式，可得球坐标系

Helmholtz 方程的表达式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}+\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+k^2v=0. \tag{9.1-36}$$

首先把变数 $\vec{r}$ 跟变数 θ,φ 分离开，以

$$v(\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$$

代入(9.1-36)，用 r^2/TY 遍乘各项，整理得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2r^2=-\frac{1}{\sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l(l+1).$$

由此得两个分离变数形式的方程

$$\frac{1}{\sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0, \tag{9.1-37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2r^2-l(l+1)\right]R=0. \tag{9.1-38}$$

方程(9.1-37)就是球函数方程(9.1-3)，把它进一步分离变数将得到(9.1-8)和连带 Legendre 方程(9.1-11). 前面已提到，方程(9.1-11)和在 $x = \pm 1$ 的"自然边界条件" 构成本征值问题，决定 l 只能取整数值.

常微分方程(9.1-38)亦即

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} = 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left[k^2a^2 - l(l+1)\right]R = 0.$$

叫作 l 阶球 Bessel 方程. 这是因为对于 $k > 0$，可以把自变数 r 和函数只 $R(r)$ 分别换作 x 和 $y(x)$，

$$x = kr, \qquad R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi}}y(x),$$

则方程(9.1-38)成为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left[x^2 - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y = 0, \tag{9.1-39}$$

而(9.1-39)是 $l + 1/2$ 阶的 Bessel 方程，其解见 § 9.3.

对于 $k = 0$，方程(9.1-38)退化成 Euler 型方程(9.1-2)，相应的解为(9.1-4)，即 $R(r) = Cr^l + Dr^{-(l+1)}$.

Helmholtz 方程来自波动方程和输运方程．上一章已着重指出用分离变数法求解波动方程和输运方程的前提是边界条件为齐次的，如有非齐次边界条件必须先“齐次化”．这样，我们将认定 Helmholta 方程的边界条件是已齐次化的．方程(9.1-38)附加球面($r = r_0$)处的齐次边界条件，构成本征值问题，决定 k 的可能数值．在 § 9.4 将会看到，对这样的本征值问题，必然有本征值 $k^2 \geq 0$．此本征值问题的求解见 § 11.5.

2. 柱坐标系

利用柱坐标系 Laplace 算符 Δ 的表达式，可得 Helmholtz 方程的

表达式为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+k^2v=0. \tag{9.1-40}$$

以分离变数形式的解

$$v(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

代入(9.1-40)，一步一步分离变数，引进两个常数 λ 和 ν^2，不难分解出三个方程

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{9.1-41}$$

$$Z''+\nu^2Z=0, \tag{9.1-42}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(k^2-\nu^2-\frac{\lambda}{\rho^2}\right)R=0. \tag{9.1-43}$$

方程(9.1-41)和没有写出的自然的周期条件

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$$

构成本征值问题，这是读者已往熟知的．本征值和本征函数是

$$\lambda = m^2, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots, \tag{9.1-44}$$

$$\Phi(\varphi) = A\cos m\varphi + D\sin m\varphi, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots, \tag{9.1-45}$$

记常数 $\mu = k^2 - \nu^2$，即

$$k^2 = \mu + \nu^2, \tag{9.1-46}$$

于是，方程(9.1-43)可改写为

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\left(\mu - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0. \tag{9.1-47}$$

如上所述，我们总认为 Helmholtz 方程的边界条件是齐次的．于是，方程(9.1-42)附加有 $z = z_1$ 和 $z = z_2$ 处的齐次边界条件，构成本征值问题，决定 ν 的可能数值．而方程(9.1-47)附加有圆柱侧面上的齐次边界条件，也构成本征值问题，决定 μ 的可能数值(本征值)．在 § 9.4 中将会看到对这里的两个本征值问题，必然有本征值 $\mu^2 \geq 0$ 和本征值

$\mu \geq 0$. 根据(9.1-46)，k^2 为两个本征值 μ 与 ν^2 之和，故 $k^2 \geq 0$.

方程(9.1-47)在自变数的代换

$$x = \sqrt{\mu}\rho$$

下化为

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0, \tag{9.1-48}$$

这是 m 阶 Bessel 方程.

从上可知，不管是球坐标系，还是柱坐标系，Helmholtz 方程在齐次边界条件下分离变数后，都有常数 $k^2 \geq 0$，即 k^2 为非负实数，从而 k 为实数. 于是，波动方程和输运方程分离变数后解得的时间函数(9.1-30) 和(9.1-35)中，k 也为实数. 由于(9.1-30)中 C, D 为任意常数，(9.1-35)中 k 以 k^2 形式出现，只需取 $k \geq 0$可.

一般，$k = \sqrt{\mu + \mu^2} > 0$. 只有 $\mu = 0$ 且 $\nu = 0$ 时，才有 $k = 0$.

当 $\mu = 0, R(\rho)$ 所遵从的方程(9.1-47)退化为 Euler 型方程，其解为(9.1-21)；当 $\nu^2 = 0, Z(z)$ 的方程(9.1-42)退化为 $z'' = 0$，其解为(9.1-20).

现将以上分离变数结果列表如下（略）（P.236）

✪ 例题

✪ **例 1 试用平面极坐标系把二维波动方程分离变数.**

✪ **解：二维波动方程为**

$$u_{tt} - a^2\Delta_2 u = 0 \tag{9.1-49}$$

先把时间变数分离出来，设分离形式的解为

$$u(\rho, \varphi; t) = U(\rho, \varphi) \cdot T(t)$$

代入式(9.1-49)，有

$$U(\rho,\varphi)\cdot T''(t)-a^2U(\rho,\varphi)\cdot T(t)=0,$$

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\Delta_2 U}{U}\ .$$

上式左边仅是 t 的函数，右边是 ρ 和 φ 的函数，若要等式成立，除非两边为同一常数，记为 $-k^2$，有

$$T''+a^2k^2T=0 \tag{9.1-50}$$

$$\Delta_2 U+k^2U=0 \tag{9.1-51}$$

式（9.1-51）为二维 Helmholtz 方程，在平面极左边系下的表达式为

$$U_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}U_\rho+\frac{1}{\rho^2}U_{\varphi\varphi}+k^2U=0\ .$$

进一步分离变数，令

$$U(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

并代入上式得

$$R''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi) + k^2R(\rho)\Phi(\varphi) = 0$$

由此得

$$\frac{\rho^2R''}{R} + \frac{\rho R'}{R} + k^2\rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}\,.$$

同理，等式两边应为同一常数，记为 m^2，得

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0\,, \tag{9.1-52}$$

$$\rho^2R'' + \rho R' + (k^2\rho^2 - m^2)R = 0\,. \tag{9.1-53}$$

对方程（9.1-53）作变数代换 $x = k\rho$ 后变为 Bessel 方程

$$x^2R'' + xR' + (x^2 - m^2)R = 0\,. \tag{9.1-54}$$

方程（9.1-52）和自然周期条件 $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ 一起构成本征值问题，其解为

$$m = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots .$$

$$\Phi_m = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi ,$$

方程（9.1-50）的解为

$$T_k = C_k \cos kat + D_k \sin kat .$$

✪ 例 2 试用平面极坐标系把二维输运方程分离变数.

✪ 解：二维输运方程为

$$u_t - a^2\Delta_2 u = 0 \tag{9.1-55}$$

在平面极坐标系下方程（9.1-55）为

$$u_t - a^2\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\rho\rho}\right) = 0 , \tag{9.1-56}$$

令 $u(\rho,\varphi;t)=R(\rho)\Phi(\varphi)T(t)$，代入方程（9.1-56）中，整理得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{\rho}\frac{R'}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-k^2\,.$$

$$T'+a^2k^2T=0\,, \tag{9.1-57}$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{\rho}\frac{R'}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-k^2\,. \tag{9.1-58}$$

方程（9.1-58）可进一步分离变数

$$\rho^2\frac{R''}{R}+\rho\frac{R'}{R}+k^2\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=m^2\,,$$

即

$$\begin{cases}\Phi''+m^2\Phi=0\,,\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\,.\end{cases} \tag{9.1-59}$$

$$\rho^2R''+\rho R'+(k^2\rho^2-m^2)R=0\,. \tag{9.1-60}$$

方程（9.1-60）作变数代换 $x=k\rho$ 变成 Bessel 方程

$$x^2R''+xR'+(x^2-m^2)R=0\,. \tag{9.1-61}$$

方程（9.1-57）和（9.1-59）的解分别为

$$T_k = A_k e^{-a^2k^2t},$$

$$\Phi_m = B_m \cos m\varphi + C_m \sin m\varphi .$$

作业(No.18)

P. 237：1，2