§9.2 常点邻域上的级数解法

用球坐标系和柱坐标系对 Laplace 方程、波动方程、输运方程进行分离变数，就出现连带 Legendre 方程、 Legendre 方程、Bessel 方程、球 Bessel 方程等待殊函数方程．用其他坐标系对其他数学物理偏微分方程进行分离变数，还会出现各种各样的特殊函数方程．它们大多是线性二阶常微分方程．这向我们提出求解带初始条件的线性二阶常微分方程

$$\begin{aligned} &y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ &y(x_0) = C_0, \qquad y'(x_0) = C_1 \end{aligned} \tag{9.2-1}$$

的任务，其中 x_0 为任意指定点，C_0, C_1为常数．

这些线性二阶常微分方程常常不能用通常的方法解出，但可用级数解法解出．所谓级数解法，就是在某个任选点 x_0 的邻域上，把待求的解表为系数待定的级数，代入方程以逐个确定系数．

级数解法是一个比较普遍的方法，适用范围较广，可借助于解析函数的理论进行讨论．这里仅介绍有关的结论，不作证明．读者如需要了解有关证明，可以参看例如斯米尔诺夫著《高等效学教程》第三卷第三分册等书．

求得的解既然是级数，就有是否收敛以及收敛范围的问题．级数解法的计算较为繁长，要求耐心和细心．

不失一般性，我们讨论复变函数 $w(z)$ 的线性二阶常微分方程

$$\frac{d^2w}{dx^2}+p(z)\frac{dw}{dx}+q(z)w=0, \qquad w(z_0)=C_0, \quad w'(z_0)=C_1. \tag{9.2-2}$$

其中 z 为复变数，z_0 为选定的点，C_0, C_1 为复常数．

9.2.1 方程的常点和奇点

如果方程(9.2-2)的系数函数函数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在选定的点 z_0 的邻域

中是解析的，则点 z_0 叫作方程(9.2-2)的常点．如果选定的点 z_0 是 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的奇点，则点 z_0 叫作方程(9.2-2)的奇点．

本节介绍常点邻域上的级数解法．

9.2.2 常点邻域上的级数解

关于线性二阶常微分方程(9.2-2)在常点邻域上的级数解，有下面的定理(本书不证明)．

若方程(9.2-2)的系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 为点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 中的解析函数，则方程(9.2-2)在这圆中存在唯一的解析的解 $w(z)$ 满足初值条件 $w(z_0)=C_0 w'(z_0)=C_1$，其中 C_0, C_1 是任意给定的复常数．

既然线性二阶常微分方程(9.2-2)在常点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 上存在唯一的解析解．就把它表成此邻域上 Taylor 级数的形式

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \tag{9.2-3}$$

其中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 有待确定.

为了确定级数解(9.2-3)中的系数，具体做法是以(9.2-3)代入方程(9.2-2)，合并同幂项，令合并后的各系数分别为零，找出系数 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 之间的递推关系，最后用已给的初值 C_0, C_1 来确定各个系数的 a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$，从而求得确定的级数解. 下面以 l 阶 Legendre 方程为例，具体说明级数解法的步骤.

9.2.3 Legendre 方程 自然边界条件

1. Legendre 方程的级数解

在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解 l 阶 Legendre 方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0, \tag{9.2-4}$$

即

$$y'' - \left[\frac{2x}{1-x^2}\right]y' + \left[\frac{l(l+1)}{1-x^2}\right]y = 0.$$

方程的系数 $p(x) = -2x/(1-x^2).q(x) = l(l+1)/(1-x^2)$．在 $x_0 = 0$，单值函数 $p(x_0) = 0, q(x_0) = l(l+1)$，均为有限值，它们必然在 $x_0 = 0$ 为解析的．因此，$x_0 = 0$ 是方程的常点．根据常点邻域上解的定理，解具有(9.2-3)的 Taylor 级数形式，在这里就是

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k.$$

所以

$$\begin{aligned} y'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + (k+1)a_{k+1}x^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k, \end{aligned}$$

$$y''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + (k+2)(x+1)a_{k+2}x^k + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k.$$

将它们代入方程(9.2-4)，合并各同幂次项后左边是个 Taylor 级数，右边是所有系数均为零的 Taylor 级数，即 l 阶 Legendre 方程(9.2-4)可表示为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (l^2 - l - k^2 - k)a_k\right] x^k = 0.$$

所以，左边 Taylor 级数同幂次项的系数必须全部为零，即

$$\begin{aligned}
&2 \cdot 1 a_2 + l(l+1)a_0 = 0, && 3 \cdot 2 a_2 + l(l+1)a_1 = 0,\\
&4 \cdot 3 a_4 + (l^2 + l - 6)a_2 = 0, && 5 \cdot 4 a_5 + (l^2 + l - 12)a_3 = 0,\\
&\qquad \vdots, && \qquad \vdots.
\end{aligned}$$

其一般式为

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (l^2 - l - k^2 - k)a_k = 0$$

由此得系数递推公式

$$a_{k+2}=\frac{(k^2+k-l)(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$
$$=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k,\quad k=0,1,2,\cdots. \qquad (9.2\text{-}5)$$

如果假设已知 a_0, a_1，按照递推公式具体进行系数的递推，容易得到 l 阶 Legendre 方程(9.2-4) 的级数解(9.2-3)的个系数为，

偶次幂项,

$$a_2=\frac{(-l)(l+1)}{2!}a_0,$$
$$a_4=\frac{(2-l)(l+3)}{4!}a_0,$$
$$\vdots,$$

奇次幂项

$$a_3=\frac{(1-1)(l+2)}{3!}a_1,$$
$$a_5=\frac{(3-l)(l+4)}{5!}a_1,$$
$$\vdots,$$

可见，令数递推公式(9.2-5)中 $k=0,2,4,\cdots,2k$，即得偶次幂项的系

数 a_{2k}，令 $k=1,3,5,\cdots,2k+1$ 即得奇次幂项的系数 a_{2k+1}，即

$$a_{2k}=\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(2-l)(-l)\cdot(l+1)(l+3)}{(2k)!}$$

$$\cdot\frac{\cdots(l+2k-1)}{}a_0=\frac{\prod_{m=0}^{k-1}(-l+2m)\prod_{m=0}^{k-1}(l+2m+1)}{(2k)!}a_0,\qquad k=1,2,\cdots$$

$$a_{2k+1}=\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)\cdot(l+2)(l+4)\cdot(l+2k)}{(2k+1)!}a_1.$$

$$=\frac{\prod_{m=1}^{k}(-l+2m-1)\prod_{m=1}^{k}(l+2m)}{(2k+1)!}a_1,\qquad k=1,2,\cdots.$$

可见，由系数 a_0,a_1 可完全确定所有系数，系数 a_0,a_1 可看作是 l 阶 Legendre 方程的两个积分系数.

于是我们得到 l 阶 Legendre 方程的解

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x), \tag{9.2-6}$$

其中两个特解分别为

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{a_0} x^{2k}, \tag{9.2-7}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_1} x^{2k+1}. \tag{9.2-8}$$

$y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 分别是 x 的偶次幂和奇次幂多项式.

需要确定级数 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的收敛半径. 把幂级数收敛半径的公式(3.2.3)应用于 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$. 在这里就是 $R = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+2}|$. 利用递推公式(9.2-5),

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)(n+1)}{(n-l)(n+l+1)} \right| = 1.$$

这样, 级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 收敛于 $|x| < 1$ 而发散于 $|x| > 1$. $y_0(x)$ 仅

含 x 的偶次幂，为偶函数．$y_1(x)$ 仅含 x 的奇次幂，为奇函数．

2. 级数解在 $x = \pm 1$ 的收敛性

从 § 9.1 可以知道，l 阶 Legendre 方程中的 $x = \cos\theta$，其绝对值 $|x| = |\cos\theta| \le 1$．因此，尽管级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 发散于 $|x| > 1$，这根本不成为问题．

不过，$x = \pm 1$ 对应于 $\theta = 0, \pi$ (即球坐标的极轴方向及其反方向)．级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $x = \pm 1$ 是否收敛，倒是要认真考虑的．

本书附录四利用 Gauss 判别法证明，级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 分别在 $x = \pm 1$ 发散．那么，是否可能存在某个在 $x = \pm 1$ 为有限的级数解呢？事实上，§ 9.3 习题 5 就是求 l 阶 Legendre 方程在 $x = +1$ 为有限的级数解，不过，这个解在 $x = -1$ 是发散的．

用反证法可以证明 l 阶 Legendre 方程在 $x = \pm 1$均为有限的级数解不存在．

假定有一个级数解 $y(x)$ 在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 是有限的．$y(x)$ 总可表为 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的线性组合．

$$y(x)=D_0y_0(x)+D_1y_1(x), \tag{9.2-9}$$

注意，如果把 x 一律换为 $-x$，l 阶 Legendre 方程并不改变．这是说(9.2-9)右边的 x 如换为 $-x$

$$y(-x)=D_0y_0(-x)+D_1y_1(-x), \tag{9.2-10}$$

仍然是 l 阶 Legendre 方程的解，并且也在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 有限．由于 $y_0(x)$ 是偶函数，$y_1(x)$ 是奇函数，(9.2-10)可以改写为

$$y(-x)=D_0y_0(x)-D_1y_1(-x). \tag{9.2-11}$$

既然(9.2-9)和(9.2-11)都是 l 阶 Legendre 方程在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 为有限的解，它们的和即 $2D_0y_0(x)$，以及它们的差即 $2D_1y_1(x)$ 应当也是 l 阶 Legendre 方程在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 为有限曲解．但是，上面已证明 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $x=\pm1$ 发散，由此可见，“有一个级数解 $y(x)$ 在

$x = +1$ 和 $x = -1$ 为有限”的假定不能成立．结论是 l 阶 Legendre 方程没有形如 $y(x) = D_0y_0(x) + D_1y_1(x)$而在 $x = \pm 1$ 均有限的无穷级数解．

有不少定解问题要求“在一切方向保持有限，相应地就要求 Legendre 方程的解在一切方向 $0 \le \theta \le \pi$ 即在 x 的闭区间 $[-1, +1]$ 上保持有限．而无穷级数解包括 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 均不满足这个要求．

出路何在？无穷级数解在 $x \pm 1$ 存在发散问题，如若能退化为多项式，具有有限多项，在 $x = \pm 1$ 必然取有限数值，那么，发散问题就根本不存在了．

3. 退化为多项式的可能性

仔细观察级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$，它们确实有退化为多项式的可能．

如参数 l 是某个偶数，$l = 2n$ (n 是正整数)，则 $y_0(x)$ 只到 x^{2n} 项为止，因为从 x^{2n+2} 项起，系数都含有因子 $(2n - l)$ 从而都是零．$y_0(x)$

不再是无穷级数而是 $2n$ 次多项式，并且只含偶次幂项．至于 $y_1(x)$，因其系数不含因子 $(2n-l)$，仍是无穷级数且在 $x\pm 1$ 发散．在一般解(9.2-6)中只要取任意常数 $a_1=0$ 即得一个只含偶次幂的 l 次多项式 $a_0y_0(x)$．以后将选取适当的 a_0 得到一个特解，称作 l 阶 Legendre 多项式．

如参数 l 是某个奇数，$l=2n+1$ (n 是零或正整数)，则 $y_1(x)$ 只到 x^{2n+1} 为止，因为从 x^{2n+3} 项起，系数都含有因子 $(2n+1-l)$ 从而都是零．$y_1(x)$ 不再是无穷级数而是 $2n+1$ 次多项式，并且只含奇次幂项．至于 $y_0(x)$ 因其系数不含因子 $(2n+1-l)$，仍是无穷级数且在 $x=\pm 1$ 发散．在一般解(9.2-6)中只要取任意常数 $a_0=0$ 即得一个只含奇次幂的 l 次多项式 $a_1y_1(x)$．以后将选取适当的 a_1 得到一个特解，称作 l 阶 Legendre 多项式．

4. 自然边界条件

由此看来，对于 legendre 方程，“解在区间 $[-1,+1]$ 的两端 $x=\pm 1$ 保持有限”竟然是一个严重的限制，在分离变数过程中所引入的常数 $l(l+1)$ 中的 l 被限制于零和正整数，通常把“解在 $x=\pm 1$ 保持有限” 说成是 Legendre 方程的自然边界条件.

Legendre 方程与自然边界条件构成本征值问题．本征值是

$$l(l+1), \qquad l \text{ 为零或正整数}, \tag{9.2-12}$$

本征函数则是 l 阶 Legendre 多项式.

✪ 例 1 在 $x_0=0$ 的邻域上求解常微分方程 $y''+\omega^2 y=0$ (ω 是常数).（P.243，1）

✪ 解：方程的系数 $p(x)=0, q(x)=\omega^2$ 是解析函数，$x_0=0$ 是方程的

常点，故必有唯一级数解：

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad \omega^2 y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^2 a_k x^k,$$

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k,$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+1} x^k.$$

代入原方程，整理得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\omega^2 a_k + (k+2)(k+1) a_{k+2}\right] x^k = 0.$$

$$\omega^2 a_k + (k+2)(k+1) a_{k+2} = 0$$

由此可导出各奇、偶项的系数递推关系

$$a_2 = -\frac{\omega^2}{2!} a_0, \qquad a_3 = -\frac{\omega^2}{3 \times 2} = -\frac{\omega^2}{3!} a_1,$$

$$a_4 = -\frac{\omega^2}{4\times 3}a_2 = \frac{\omega^4}{4!}, \qquad a_5 = -\frac{\omega^2}{5\times 4}a_3 = \frac{\omega^4}{5!}$$

$$\vdots, \qquad \vdots.$$

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k)!}a_0, \qquad a_{2k+1} = (-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!}a_1.$$

所以

$$\begin{aligned} y(x) &= = \text{奇次幂项} + \text{偶次幂项} \\ &= a_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + a_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ &= a_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(\omega x)^{2k} + \frac{a_1}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}(\omega x)^{2k+1}, \\ &= a_0\cos\omega x + \frac{a_1}{\omega}\sin\omega x. \end{aligned}$$

式中 a_0 和 a_1 为任意常数，由 $y(0) = C_1$ 和 $y'(0) = C_2$ 确定，所以可以

表示为

$$y(x) = a_0 \cos \omega x + a_1 \sin \omega x.$$

这正是以前得到的解.