§9.3 正则奇点邻域上的级数解法

9.3.1 奇点邻域上的级数解法

求解线性二阶常微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \tag{9.3-1}$$

如果选定的点 z_0 是方程(9.3-1)的奇点，则一般说来，解也以 z_0 为奇点，在点 z_0 邻域上的展开式不是泰勒级数而是有负幂项的 Laurant 级数.

关于奇点邻域上的级数解，有下面的定理(本书不证).

若英 z_0 为方程(9.2-2)的奇点，则在点 z_0 的邻域 $0 < |z - z_0| < R$，方程(9.2-2)存在两个线性独立解，其形式为

$$w_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s_1+k}, \tag{9.3-2}$$

$$w_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}, \tag{9.3-3}$$

或

$$w_2(z) = A w_1(z) \ln(z - z_0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}. \tag{9.3-4}$$

其中 s_1, s_2, A, a_k, b_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为常数.

以上仅仅是一般性的论断，并未提供具体求出级数解的方法．即如何确定常数 s_1, s_2, A, a_k, b_k．事实上，这些常数的确定在一般情况下很困难，本书从略.

9.3.2 正则奇点邻域上的级数解

如果在方程(9.3-1)的奇点 z_0 的邻域 $0 < |z - z_0| < R$，方程的两个线性独立解全都具有有限个负幂项，则奇点 z_0 称为方程的正则奇点．这里只讨论这种相对容易的情况．这也是常见的情况.

如系数少 $p(z)$ 以 z_0 为不高于一阶的极点，且系数 $q(z)$ 以 z_0 为不高于二阶的极点，即

$$p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k(z-z_0)^k, \qquad q(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k(z-z_0)^k, \tag{9.3-5}$$

可以证明奇点 z_0 就是正则奇点．这就是说，在 z_0 的邻域 $0 < |z-z_0| < R$，方程(9.3-1)的两个线性独立解的级数表达式只有有限个负幂项：

$$w_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^{s_1+k}, \tag{9.3-6}$$

$$w_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k}, \tag{9.3-7}$$

或

$$w_2(z) = Aw_1(z)\ln(z-z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k}. \tag{9.3-8}$$

其中 s_1 和 s_2 是所谓判定方程

$$s(s-1)+sp_{-1}q_{-2}=0 \tag{9.3-9}$$

的两个根，而 s_2 为较小的那一个根，至于 A, a_k 和 b_k 均为常数系数.

(9.3-7)适用于 $s_1-s_2\neq$ 整数的情况，(9.3-8)则适用于 $s_1-s_2=$ 整数的情况．不过，(9.3-8)中的 A 也有可能等于零，而(9.3-8)又归结为(9.3-7)．上述结论的验证从略（P.245～247）.

例 1 在 $x_0=0$ 的邻城上求解 $x^2y''+xy'-m^2y=0$ (m 是常数)，这个方程即(8.1.67)．（P.260，1）

下面以 Bessel 方程为例，说明在方程的正则奇点邻域上如何用级数解法求解线性二阶常微分方程.

9.3.3 Bessel 方程

1. ν 阶 Bessel 方程

在点 $x_0 = 0$ 的邻域上求解 ν 阶 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad \nu \neq \text{整数或半奇数} \qquad (9.3\text{-}18)$$

即

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

点 $x_0 = 0$ 是 $p(x) = 1/x$ 的一阶极点，又是 $q(x) = 1 - \nu^2/x^2$ 的二阶极点．因此，点 $x_0 = 0$ 是 Bessel 方程的正则奇点．判定方程为

$$s(s-1) + s - \nu^2 = 0, \qquad \text{即} \quad s^2 - \nu^2 = 0.$$

两个根为 $s_1 = \nu, s_2 = -\nu$，两根之差 $s_1 - s_2 = 2\nu \neq 0$ 或正整数．因此线性独立的两个解取(9.3-6)和(9.3-7)的形式．

先不分 s_1 和 s_2，以实变数 x 的解

$$y(x) = a_0x^s + a_1x^{s+1} + a_2xs + 2 + \cdots + a_kx^{s+k} + \cdots, \qquad a_0 \neq 0$$

先不分 s_1 和 s_2，以实变数 x 的解

$$y(x) = a_0x^s + a_1x^{s+1} + a_2x^{s+2} + \cdots a_kx^{k+s} + \cdots, \qquad a_0 \neq 0,$$

代入方程(9.3-18)．合并同幂次的项，合并同幂次项后的各项系数应为零，由此得

$$\begin{cases} \left[s^2 - \nu^2\right] a_0 = 0, \\ \left[(s+1)^2 - \nu^2\right] a_1 = 0, \\ \left[(s+2)^2 - \nu^2\right] a_2 + a_0 = 0, \\ \qquad \vdots, \\ \left[(s+k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-2} = 0, \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{9.3-19}$$

根据约定 $a_0 \neq 0$，(9.3-19)中第一个方程即是判定方程：$s^2 - \nu^2 = 0$，两个根前面已经解出．将这两个根代入(9.3-19)中第二个方程，有 $\left[(\pm\nu + 1)^2 - \nu^2\right] a_1 = 0$，得

$$a_1 = 0.$$

利用以后各式进行系数的递推，递推公式是

$$\left[(s + k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-1} = 0,$$

$$a_k = \frac{-1}{(s + k)^2 - \nu^2} a_{k-1} = \frac{-1}{(s + k_\nu)(s + k - \nu)} a_{k-2}.$$

若取 $s = +\nu$，递推公式为

$$a_k = \frac{-1}{k(2\nu + k)} a_{k-2},$$

由此得系数通式

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{k!(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + k)} \cdot \frac{1}{2^{2k}} a_0,$$

$$a_{2k+1} = 0.$$

这样，得到 ν 阶 Bessel 方程的一个特解

$$\begin{aligned} y_1(x) = a_0 x^\nu \Bigg[1 - \frac{1}{1!(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ = + \frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots \\ = + (-1)^k \frac{1}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \cdots \Bigg] \end{aligned} \qquad (9.3\text{-}20)$$

这个级数的收敛半径，按(3.2-3)为

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} 2^2 k(2\nu + k) = \infty.$$

这是说，只要 x 有限，级数解(9.3-20)就收敛．通常取

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu}\Gamma(\nu+1)$$

关于实变数 x f的 $\Gamma(x)$ 通常在微积分教本中部有都，关于复变数 z 的 Γ 函数，读者可参阅附录十三，并把这个解叫作 ν 阶 Bessel 函数，记

作 $J_\nu(x)$，

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \tag{9.3-21}$$

再取 $s=-\nu$，同理可得另一特解，其收敛半径也是 ∞. 该特解仿照上述办法最终可表示为

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}. \tag{9.3-22}$$

称为 $-\nu$ 阶 Bessel 函数.

ν 阶 Bessel 方程的通解是

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x), \tag{9.3-23}$$

C_1, C_2 为任意常数，与 x 无关.

有时取 $C_1=\operatorname{ctg}\nu\pi, C_2=-\csc\nu\pi$ 代入(9.3-23)得到一个特解，以此作为 ν 阶 Bessel 方程的第二个线性独立的解. 叫作 ν 阶 Neumann 函

数（也称第二类 Bessel 函数），即

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - T_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{9.3-24}$$

因此，ν 阶 Bessel 方程的通解也可取为

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x). \tag{9.3-25}$$

2. 半奇数（$l+1/2$）阶 Bessel 方程

在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解 $(+1/2)$ 阶 Bessel 方程

$$x^2 y'' + xy' + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] y = 0, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots. \tag{9.3-26}$$

点 $x_0 = 0$ 是方程的正则奇点.

首先考虑 $l = 0$ 的 $1/2$ 阶 Bessel 方程

$$x^2 y'' + xy' + \left[x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] y = 0. \tag{9.3-27}$$

前面已经解出判定方程的两个根为 $s_1 = \nu, s_2 = -\nu$，在此就是 $s_1 = 1/2, s_2 = -1/2$．对应于大根 $s_1 = 1/2$ 的特解是 Bessel 函数(9.3-21)，其中 $\nu = 1/2$．于是 1/2 阶 Bessel 函数可写为

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$= \cdots\cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \quad (9.3\text{-}28)$$

判定方程的两各之差 $s_1 - s_2 = 1$ 是整数，第二个特解的形式是(9.3-8)，即

$$y_2(x) = AJ_{\frac{1}{2}}(x)\ln x + \sum_{k=-1/2}^{\infty} b_k x^k.$$

把上式代入 1/2 阶 Bessel 方程中，可确定其系数 $A = 0$ 和 b_k 的值，

最后得第二个特解为

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{9.3-29}$$

尽管判定方程两根之差是整数 1，但常数 $A = 0$，第二特解的表达式中并不出现对数函数.

所以 1/2 阶 Bessel 方程的通解是

$$y(x) = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x), \tag{9.3-30}$$

现在考虑一般的半奇数 $(l + 1/2)$ 阶 Bessel 方程(9.3-26)，判定方程的两个根为 $s_1 = l + 1/2, s_2 = -(l + 1/2)$，两各之差为 $s_1 - s_2 = 2l + 1$，为正整数. 对应于大根 $s_1 = l + 1/2$ 的特解应为 $\nu = l + 1/2$ 阶的 Bessel 函数(9.3-21)，即

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(l + 1/2 + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k}. \tag{9.3-31}$$

第二个线性独立的特解的形式是(9.3-8)，即

$$y_2(x) = AJ_{l+\frac{1}{2}}(x) + \sum_{k=-(l+1/2)}^{\infty} b_k x^k.$$

代其入方程(9.3-26)，可以同样有 $A = 0$，所以第二个特解仍然可用(9.3-22)表示，不过应去 $-\nu = -(l + 1/2)$，即

$$J_{-(l+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-l - 1/2 + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-l-\frac{1}{2}+2k}. \tag{9.3-32}$$

因此 $(l + 1/2)$ 阶 Bessel 方程的通解是

$$y(x) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-(l+\frac{1}{2})}(x). \tag{9.3-33}$$

3. 整数 m 阶 Bessel 方程

在点 $x_0 = 0$ 的邻居域上求解整数 m 阶 Bessel 方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0, \qquad (m \text{ 为自然数}) \tag{9.3-34}$$

的解法与前类似．可以证明，其两个线性独立的特解为

$$J_m(x) = \sum_{k=0}(-1)^k \frac{1}{k!(m+k!)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}, \tag{9.3-35}$$

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) J_m(x). \tag{9.3-36}$$

这里，$\Gamma(m+k+1) = (m+k)!$，C 称为 Euler 常数，定义为

$$C = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\right) = 0.577216\cdots.$$

其通解为

$$y(x) = C_1 J m(x) + C_2 N_m(x). \tag{9.3-37}$$

比较以上几种情况可知，除 $\nu = 0$ 以外，包含 $\nu =$ 整数、半奇数阶的 Bessel 方程的解可直接由第一种情况——ν 阶 Bessel 方程（$\nu \neq 0$、整数、半奇数）的两个线性独立的特解代相应 ν 值得到．

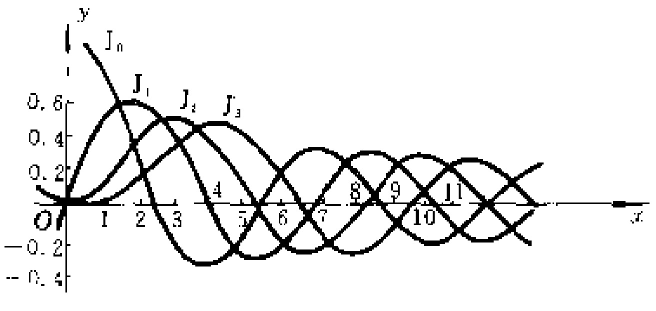

图 11-1

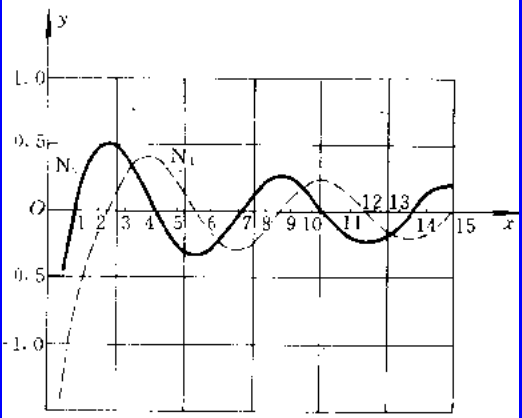

图 11-3

4. $x = 0$ 处的自然边界条件

整数阶 Bessel 函数 $J_0(x) \sim J_3(x)$ 和整数阶 Neumann 函数 $N_0(x), N_1(x)$ 的曲线图象分别画在图 11-1 和图 11-3 中．由表达式(9.3-21)，(9.3-22)，(9.3-24)，(9.3-38)可以看出，当 $x \to 0$，

$$\begin{cases} J_0(x) \to 1,\ J_\nu(x) \to 1,\ J_{-\nu}(x) \to \infty, \\ N_\nu(x) \to \pm\infty,\ M_m(x) \to -\infty, \qquad \nu > 0. \end{cases} \tag{9.3-42}$$

因此，如果所研究的区域包含 $x=0$ 在内，往往就要排除 $N_0(x), N_m(x), J_{-\nu(x)}(x), N_\nu(x)$、而只剩下 $J_0(x), J_m(x)$ 和 $J_\nu(x)$．这样，我们说，Bessel 方程，不管其阶数是整数与否，在 $x=0$ 具有自然边界条件．

9.3.4 虚宗量 Bessel 方程

不要求．