第一章 行列式

第一节 排列及其逆序数

- 引言
- 排列与逆序数

一、引言

我们在中学曾经学习过求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

当两个方程的未知数系数不成比例，即 $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ 时，我们有

$$x_1 = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad x_2 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad (2)$$

为方便记忆，我们引入二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (3)$$

则（2）可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (4)$$

即当（1）的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，（1）的解可以用二阶行列式表示为（4）。

用高斯消元法，对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

我们也可以得到类似的结果。即如果引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} \quad (6)$$

$$- c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} - c_{11}c_{23}c_{32},$$

则当（5）的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (7)$$

时，方程组（**5**）的解可以用三阶行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \qquad (8)$$

对于**n**元一次方程组，是否也有类似于上述（**4**）、

（**8**）的结果呢？这就是本章要回答的问题 。为解决这一问题，我们要引入**n**阶行列式的概念。作为定义**n**阶行列式的预备知识，下面我们将简单介绍排列的逆序数的概念。

二、排列与逆序数

1、排列与逆序数的定义

把**n**个不同元素排成一列，称为一个全排列或简称排列（**permutation**）。用**Pn**表示**n**个元素所成全排列的个数，则**Pn**＝**n**！。这门课程中我们关心的主要是一个全排列里面元素的排列次序。 在这**n**！个不

同的全排列中，我们规定某一个排列的次序为标准顺序。对自然数，我们规定从小到大的排列顺序为标准顺序。

定义1 在一个排列中，当其中某两个元素的次序与标准顺序中这两个元素的次序不一致时，我们称这两个元素产生了一个逆序(an inverse－order)。一个排列中所有的逆序数的总数称为这个排列的逆序数(number of the inverse-orders)。

例如，排列1234的顺序为标准顺序，其逆序数为0。在排列1324中，元素3和2的次序与它们在标准顺序中的次序不同（标准顺序中应该是2排在3的前面，

因为**2**比**3**小），因此这两个元素产生了一个逆序**,**而其它任意两个元素的排列次序都与其在标准顺序中的次序一样，因此排列**1324**的逆序数为**1**。

实际上，根据逆序数的定义，我们可以得到逆序数的计算方法如下：

设有**n**个自然数，$b_1, b_2, \cdots b_n$ 为这**n**个数的一个排列。则对每个 b_i **,** 如果比 b_i 大且排在 b_i 前面的元素个数为 t_i，就称 b_i 在这个排列中的逆序数为 t_i，而

$$t = t_1 + t_2 + \cdots t_n$$

就是这个排列的逆序数。

例1 求排列**4321576**的逆序数。

解 **4**前面没有数，因此 $t_1 = 0;$

3前面有**1**个数（即数字**4**）比它大，因此 $t_2 = 1;$

2前面有**2**个数比它大，因此 $t_3 = 2;$

1前面有**3**个数比它大，因此 $t_4 = 3;$

5前面没有数比它大，因此 $t_5 = 0;$

7前面没有数字比它大，因此 $t_6 = 0;$

6前面有**1**个数比它大，因此 $t_7 = 1;$

因此，这个排列的逆序数为：

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = 0+1+2+3+0+0+1=7$$

例2 求自然数**1,2**，**…**，**n**组成的排列**n (n – 1) (n – 2) ··· 21**的逆序数 。

解 由前面所述的逆序数的求法，我们可以得到此排列的逆序数为

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$$

2、排列的奇偶性

定义2 如果一个排列的逆序数为奇数，则称此排列为奇排列（**odd permutation**）；如果一个排列的逆序数为偶数，则称此排列为偶排列（**even permutation**）。

例如，上述例**1**中的排列即为奇排列。

定义3 在一个排列中，将某两个元素对调位置而其余元素保持不变的操作称为对换。

例如，在排列**1234**中对换**2**和**3**，得到新排列**1324**。排列**1234**为标准排列，因此其逆序数为**0**，它是一个偶排列，而排列**1324**的逆序数为**1**，这是一个奇排列。实际上，我们可以证明，这个结论对于一般的排列也是正确的，即有

定理1 在一个排列中，进行一次对换，排列改变奇偶性。

证：先证对换两个相邻元素的情形。

设排列为 $a_1a_2\cdots a_nabb_1b_2\cdots b_n$ 逆序数为 t。对换

a和b后，排列为$a_1a_2\cdots a_nbab_1b_2\cdots b_n$，其逆序数为$t'$。显然排列中除了$a$和$b$，其它元素的逆序数保持不变，只有$a$和$b$的逆序数有可能发生变化。当$a<b$时，$a$的逆序数增加1而$b$的逆序数不变；当$a>b$时，$a$的逆序数不变而$b$的逆序数减少**1**，总之，$t'=t+1$或者$t'=t-1$。因此，排列改变奇偶性。

其次，证明一般情况。

设排列为$a_1a_2\cdots a_nab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_k$，对换$a$和$b$后，变为$a_1a_2\cdots a_nbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_k$。我们可以把它看成是先**m**次对换相邻元素$a$与$b_i(i=1,\cdots,m)$变成$a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_mabc_1c_2\cdots c_k$，再对换$a$和$b$，然后作**m**

次对换相邻元素b_i与 $b(i=1,2\cdots m)$，变成$a_1a_2\cdots a_nbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_k$。因此，这种情况下，对换$a$和$b$，相当于作了**2m+1**次相邻元素的对换，故它改变排列的奇偶性。

由于标准顺序的排列的逆序数为**0**，由定理**1**我们有：

推论1 奇排列变成标准顺序的排列须经过奇数次对换；偶排列变成标准顺序的排列须经过偶数次对换。

由于**n**个不同元素的全排列的总数为**n!**，由定理**1**，我们还有：

推论2 在**n**个不同元素的全排列中，奇偶排列各

占一半，均为n!/2个。

证：设P为n个不同元素的全排列组成的集合，其中A表示全体奇排列所成的集合， 而B为全体偶排列所成的集合。显然P＝A∪B，而P的元素个数为n!。设A的元素个数为r，B的元素个数为t。现在我们对A中的r个排列（均为奇排列）都对换其第一、第二个元素，则我们得到r个偶排列（即变成了B中的排列），故r≤t。同理，我们可以得到t≤r。即r＝t。