第二节　n 阶行列式的定义

为给出n阶行列式的定义，让我们来分析前面所讲的三阶行列式的定义。在§1中的（6）我们定义

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32}$$

$$- c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} - c_{11}c_{23}c_{32}\ ,$$

对行列式中元素 c_{ij}，第一个下标i表示元素所在的行，称为行标；第二个下标j表示元素所在的列，称为列标。从上述表达式可以发现三阶行列式有如下特点：

（1）表达式共有3!＝6项求代数和。且每项均为

不同行不同列的三个元素的乘积；

（2）6项中有3项的代数符号为正，3项的代数符号为负；

（3）如果把每一项元素的行标按1、2、3依次排列，则每一项元素的列标排列分别为123, 231, 312以及321, 213, 132, 恰好是1、2、3这三个数的所有可能的排列。

（4）排列123, 231, 312的逆序数分别为0, 2, 2, 而排列321, 213, 132的逆序数分别为3, 1, 1, 即在6项求和中，取行标为标准顺序的排列时，其列标排列为偶排列时，则该项的代数符号为正；当列标排列为奇排列时，则该项的代数符号为负 。

因此，我们可以把三阶行列式的定义写成

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^t c_{1p_1} c_{2p_2} c_{3p_3}.$$

其中**p1p2p3**是**1**、**2**、**3**这三个数的一个排列，**t**是这个排列的逆序数，共有**3!＝6**项求和。其中求和符号Σ表示连加。

完全类似，我们可以定义**n**阶行列式。

定义**1** 设有 n^2 个数，排成**n**行**n**列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n3} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的**n**个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$, 得到形如

$$(-1)^{t} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad \textbf{(1)}$$

的项，其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数**1**，**2**，**……**，**n**的一个全排列，**t**为这个排列的逆序数。由于这样的排列共有**n!** 个, 因此形如（**1**）式的项共有**n!**项。所有这**n!**项的代数和

$$\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为**n阶行列式（determinant）**，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者简记作Δ（a_{ij}）或者**det(**a_{ij}**)**。

数$a_{ij}(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n)$称为行列式Δ**(**$a_{ij}$**)**的元素。

显然，按此定义给出的二阶行列式和三阶行列

式与我们前面所说的定义是一致的。

以后为方便起见，我们称行列式中 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为行列式的主对角线，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而称 a_{1n}, a_{2n-1}, a_{n1} 的线段为行列式的次对角线或副对角线。

例**1** 证明主对角行列式（其中对角线上的元素为 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 其余的元素为**0**）的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

次对角行列式（其中对角线上的元素为 $a_{ij}, i+j=n+1,$ $i=1,2,\cdots,n$ ，其余的元素为**0**）的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

证：第一式是显然的。下面我们只证明第二个结果。

根据行列式的定义

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

其中**t**为**n(n-1)……21**的逆序数，因此由第一节的例**2**可知**t＝n(n－1)/2**。

例**2** 证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证：　由于当j ＞ i时，$a_{ij}=0$，因此行列式的求和表达式中可能不为0的项的n个因子的下标 ip_i 应有$p_i \le i$ 即 $p_1 \le 1, p_2 \le 2, \cdots, p_n \le n$而在所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个，即1, 2……n，所以行列式中可能不为0的项只有一项，即 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，这一项的符号显然为正（因为t＝0），所以

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例3 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 $D=D_1D_2$

记 $D=\det(d_{ij})$，其中

$$d_{ij}=a_{ij},(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,k)$$

$$d_{k+i,k+j}=b_{ij},(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

考察**D**的一般项$(-1)^t d_{1r_1}\cdots d_{kr_k}d_{k+1\,r_{k+1}}\cdots d_{k+n\,r_{k+n}}$，

由于当**i ≤ k，j > k**时，$d_{ij}=0$，因此 $r_1,r_2,\cdots,r_k$，只有在**1, 2，…，k**中选取时，该项才可能不为**0**。而根据行列式的定义，当 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 在**1, 2，…，k**中选取时，$r_{k+1},r_{k+2},\cdots,r_{k+n}$只能在**k+1, k+2，…，k+n**中选取。

于是**D**中可能不为**0**的项可以记为

$$(-1)^t d_{1r_1}\cdots d_{kr_k}d_{k+1\,r_{k+1}}\cdots d_{k+n\,r_{k+n}}=(-1)^t a_{1r_1}\cdots a_{kr_k}b_{1p_1}\cdots b_{np_n}$$

这里，$p_i = r_{k+i} - k$，而t为排列$r_1, r_2 \cdots r_k (k+p_1) \cdots (k+p_n)$的逆序数。以s、m分别表示$r_1, r_2 \cdots r_k$和 $p_1 \cdots p_n$的逆序数，则显然有t＝s＋m。因此

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{r_1 \cdots r_k} \sum_{p_1 \cdots p_n} (-1)^{s+m} a_{1r_1} \cdots a_{kr_k} b_{1p_1} \cdots b_{np_n} \\
&= \sum_{r_1 \cdots r_k} (-1)^s a_{1r_1} \cdots a_{kr_k} \left[\sum_{p_1 \cdots p_n} (-1)^m b_{1p_1} \cdots b_{np_n} \right] \\
&= \sum_{r_1 \cdots r_k} (-1)^s a_{1r_1} \cdots a_{kr_k} D_2 \\
&= D_2 \sum_{r_1 \cdots r_k} (-1)^s a_{1r_1} \cdots a_{kr_k} \\
&= D_1 D_2 \text{。}
\end{aligned}
$$