第三节 行列式的性质

从行列式的定义我们可以看出，要利用行列式的定义来计算行列式的值是比较麻烦的，因为它要涉及到**n!**项的和，而且每一项均为**n**个因子相乘。本节我们将讲述行列式的一些基本性质，以后我们计算行列式的值主要是采用本节的性质将行列式化为上三角形式或下三角形式，然后利用第二节的例**2**的到行列式的值。

定理1　n阶行列式的值也可以定义为

$$D = \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n} (-1)^t a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

其中t 为排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$的逆序数。

证：按行列式的定义我们有

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

记 $$D_1 = \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n} (-1)^t a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

对行列式的任一项 $(-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{i p_i} \cdots a_{j p_j} \cdots a_{n p_n}$，其中行标排列为标准顺序排列12…i…j…n，而t 为列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数。如果我们记t′为

行标排列和列标排列的逆序数之和，则

$$(-1)^{t} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (-1)^{t'} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

我们把元素 a_{ip_i}和 a_{jp_j}对换一下，得到

$(-1)^{t'} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$。在作这一变换的过程中，行标排列由**12…i…j…n**变为**12…j…i…n**，其逆序数的奇偶性发生了改变；同时，列标排列由 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 变为 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，其逆序数的奇偶性也改变了，因此，若记**t''**为对换后的行标排列和列标排列的逆序数的和，则**t''**的奇偶性和**t'**的奇偶性相同。所以我们有

$$(-1)^{t'} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (-1)^{t''} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

经过一次对换结果如此，经过多次对换结果当然还是如此。于是，经过若干次对换，使得：列标排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$（逆序数为**t**）变为标准排列（逆序数为**0**）；行标排列则从相应的标准排列变为某个新的排列，设此排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为**s**，则有

$(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

若 $p_i = j$，则 $p_j = i$（即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$）可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 是由排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 唯一确定的。

因此，D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等。而显然和的项数是相等的，因此 D 和 D_1 的项可

以一一对应并且相等，从而$D=D_1$。

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称**D′**为行列式**D**的转置行列式。

性质1 行列式**D**和它的转置行列式**D′**相等。

证：记行列式**D**的转置行列式**D′**为

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij} = a_{ji}$**，按定义**

$$D' = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

而由定理**1**，上式右边就是**D**，即**D＝D′**。

由性质**1**可知，行列式中行和列的地位是完全一样的。凡是对行成立的性质，对列也有同样的结论。

由第二节例**2**知道下三角行列式（即主对角线以上的元素全部为**0**的值等于主对角线上的元素的乘积，

因此由性质**1**知道上三角行列式（即主对角线以下的元素全部为**0**）的值也等于其主对角线的元素的乘积。）

性质**2** 互换行列式的两行（列），行列式变号。

证：设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D = \det(a_{ij})$ 交换第i，j两行得到的，即当k＝i，j时，$b_{ip} = a_{jp}, b_{jp} = a_{ip}$， 而当k不等于i，j 时，

$b_{kp}=a_{kp}$。于是

$$D_1=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

其中12…i…j…n为标准排列，t 为排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ **的逆序数。设排列** $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$**的逆序数为t1，**

$(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，**因此**

$$D_1=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t_1} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=-D_0$$

以r_i 表示行列式的第i行（row），以c_i 表示行列式的第i列（column）。交换第i , j行记作$r_i \leftrightarrow r_j$。交换l, m列记作$c_i \leftrightarrow c_j$。

推论 若行列式有两行（列）完全相同，则此行列式的值为0。

证：交换这两行，则D＝－D，故D＝0。

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数λ，等于用数λ乘上此行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda D。$$

第i行（或列）乘以λ，记作 $r_i \times \lambda$（或 $c_i \times \lambda$）。

推论 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式的符号外面。第i行（或列）提出公因子λ，记作 $r_i \div \lambda$（或 $c_i \div \lambda$）。

由性质2的推论和性质3的推论可知

性质4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为0。

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数的和，例如第i列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式的和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一列（行）的各元素同乘以同一个数加到另外一列（行）对应的元素上去，行列式的值不变。

例如，以**k**乘第**j**列加到第**i**列（记作$c_i + kc_j$），有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_i + kc_j}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} + ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} + ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} + ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（以**k**乘第**j**行加到第**i**行，记作 $r_i + kr_j$。）

以上诸性质请读者作为练习自己证明（性质**5**可以用行列式的定义证明。性质**6**可用性质**4**和性质**5**来证明）。利用这些性质可以简化行列式的计算。

例**1** 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解：

$$D \xlongequal{r_4 \leftrightarrow r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}]{r_2 - 4r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3 \times (-1) \\ r_2 \times (-1)}]{\substack{r_4 \times (-1) \\ r_3 \leftrightarrow r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 11 & 14 \\ 0 & 5 & 9 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 3r_2]{r_4 - 5r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{vmatrix}$$

$=88$

例2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解： 这个行列式有一个很特殊的特点：其每一行的元素之和均为**5**。我们利用这一点进行化简。

$$D\overset{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3\\c_1+c_4}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\overset{c_1\div 5}{=\!=\!=}5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_3 - r_1 \\ r_2 - r_1}} 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

注意　我们在利用行列式的性质6进行化简时，以k乘第j列加到第i列（记作 $c_i + kc_j$）时，发生变化的是第i列，第j列本身是没有发生变化的！在以k乘第j行加到第i行时，情况也是如此，第j行本身也是没有发生变化的！大家可以仔细琢磨上面两个例子。

实际上，利用行列式的性质化简行列式，其基本思路正如上面两个例子所示，都是利用行列式的性质将其化为三角行列式。若遇到数字不便于计算时，我

们往往把一个比较简单的数（比如**1**）换到某一个位置。例如例**1**中的第一步，我们把第一行和第四行互换，目的就是要把数字**1**换到第一行第一列的位置，然后在把第一列的剩下的几个元素化为**0**。这一步完成后，我们再看第二列的**－3**，**－1**，**－5**啊，道理和刚才讲的一样，把**－1**换到第二行第二列的位置，然后将它化为**1**，再把**1**下面的两个元素化为**0**。后面的做法完全与此类似。

例3 计算

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & 2b & 3c & 4d \\ a & 3b & 4c & 5d \\ a & 4b & 5c & 6d \end{vmatrix}$$

解：

$$D \xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_3 - r_1 \\ r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & 2c & 3d \\ 0 & 2b & 3c & 4d \\ 0 & 3b & 4c & 5d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_2]{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & 2c & 3d \\ 0 & b & c & d \\ 0 & b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

（因为第三行和第四行元素相同）