第四节 行列式按行(列)展开

一般说来，低阶行列式的计算要比高阶行列式的计算要简便，于是我们自然地考虑到用低阶的行列式来表示高阶的行列式的问题。为此，先引入余子式和代数余子式的概念。

定义 在**n**阶行列式 $D=(a_{ij})$ 中，把元素 a_{ij} 所在的第**i**行、第**j**列划去，剩下的元素按原来的相对位置形成的**n-1**阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如 四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{34} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{34}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-M_{34}$$

引理 设 $D=\det(a_{ij})$ 是**n**阶行列式，如果其中第**i**行(或第j列)元素除 a_{ij} 外都为零，则 $D=a_{ij}A_{ij}$

证：先证明特殊情况，设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum_{1 p_2 \cdots p_n}(-1)^t a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=a_{11}\sum_{1 p_2 \cdots p_n}(-1)^t a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里**t**是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，当**p=1**时，就是排列的 $p_2 \cdots p_n$ 逆序数，故

$$D=a_{11}\sum_{p_2 \cdots p_n}(-1)^t a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=a_{11}M_{11}=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}=a_{11}M_{11}$$

再证一般情况，设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把**D**的行列作如下调换：把**D**的第**i**行依次与第**i–1**行、第**i–2**行、**…**、第**1**行对调，这样 a_{ij} 就调到原来 a_{1j} 的位置上，调换的次数为**i-1.**再把第**j**列依次与第**j–1**列、第**j–2**列、…第**1**列对调**,**这样就调到了左上角**,**调换

的次数为j-1。总之，经过i+j-2次调换，把a_{ij}调到了左上角，所得的行列式$D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D$，而元素$a_{ij}$在**D1**中的余子式仍然是$a_{ij}$在**D**中的余子式$M_{ij}$。

利用前面结果，有

$$D_1=a_{ij}M_{ij}$$

于是

$$D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

定理1 行列式等于它的任一行**(**列**)**的各元素与其对应的代数余子式乘积之和**,**即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$ （按行展开式）

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$$ （按列展开式）

证：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & a_{in}+0+\cdots+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据引理, 即得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

类似地, 若按列证明, 可得

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$$

该定理叫做行列式按行(列)展开法则。显然，行列式按行(列)展开法则提供了计算n阶行列式的一种方法：通过反复运用该法则，将一个n阶行列式归结

为**n!**项的代数和，每一项是**n**个不同行不同列的元素的乘积。

推论 行列式任一行**(**列**)**的元素与另一行**(**列**)**的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$D=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或

$$D=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$$

证：把行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 按第**j**行展开，有

$$
a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

在上式中把 a_{ik} 换成 $a_{jk}(k=1,\cdots,n)$,可得

$$
a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

当**i≠j**时，上式右端行列式中有两行对应元素相同，故行列式为零，即得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

上述证法若按列进行，即可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$$

综合定理及其推论，有代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

称为克朗尼克（**Kronecker**）符号。