第五节　综合与提高

对于一个阶数比较高的行列式，利用定义求值或利用行列式按行(列)展开法则求值都不是一种可行的方法。诚如前面所指出的，计算一个n阶行列式就要作n!次乘法.当n增大时，n!的增长是非常快的，例如,18!≈6.4×1015。假定计算机作一次乘法运算的时间是百万分之一秒，则通过反复使用行列式按行(列)展开法则并用这种计算机求一个18阶行列式的值需要的时间(以每天工作八小时计算)竟多达200年！这就说明为一般地解决行列式的求值问题，必须利用行列式性质发展有效的计算方法，对各个具体问题还要善于发现和利用其特点以简化手续。本节例析几种常用的行列式值的求法，最后介绍行列式的简单应用。

一　行列式值的求法

下面通过例子说明几种常用的求解行列式的方法。

1.利用行列式性质把行列式化成等值的三角形行列式进行计算.

例**1**　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$D \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4 + r_5}{\overset{r_2 - r_1}{=\!=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4 - 8r_2}{\overset{r_3 + 4r_2}{=\!=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4+\frac{5}{4}r_3}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 40$$

例2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是各列**n**个元素之和都为**x+(n–1)a**。今把后**n–1**行同时加到第**1**行，提出公因子**x+(n–1)a**，然后各行减去第**1**行的**a**倍：

$$D=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

2．利用行列式性质降阶计算.

- 这种方法的基本思想是利用行列式的性质**6**将行列式的一行**(**或一列**)**的**n–1**个元素法变成零，然后按该行（或该列）展开，从而将一个**n**阶行列式化成一个**n–1**阶行列式进行求解。

例**3**　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

- 解　我们保留a33，将第3行的其余元素变为0，然后按第3行展开：

$$D \xlongequal[c_4 + c_3]{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40$$

3.建立递推关系进行计算.

在行列式计算中，建立递推关系再行求解，也是一种有用的技巧。当然，发现递推关系需要经验，也可能要费一番功夫。

例4 计算行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & & & b & \\ & & \ddots & & ⋰ & & \\ & & & a \quad b & & & \\ & & & c \quad d & & & \\ & & ⋰ & & \ddots & & \\ & c & & & & d & \\ c & & & & & & d \end{vmatrix}$$

解 可以看出

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & D_{2n-1} & & & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \\ c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

按第1行展开，有

$$D_{2n} = a\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & D_{2n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix} + (-1)^{1+2n} b \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & D_{2n-2} & \\ 0 & & & \\ c & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

对两个（2n–1）阶行列式各按最后一列展开，得

$$D_{2n} = adD_{2(n-1)} - bc\cdot(-1)^{(2n-1)+1}D_{2(n-1)}$$

$$= (ad-bc)\, D_{2(n-1)}$$

这是一个递推公式，而$D_2 = ad-bc$，故

$$D_{2n} = (ad-bc)\, D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2\, D_{2(n-2)}$$

$$= \ldots = (ad-bc)^{n-1} D_2 = (ad-bc)^n$$

例5 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

解 显然可以看出

$$V_n = \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & V_{n-1} & & x_n \\ & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

但在尝试建立**Vn**与**Vn–1**的递推关系时却无从下手.我们采用另一种做法:

从最后一行开始,每行减去上一行的**xn**倍,可得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & 0 \\ x_1^2 - x_1 x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n \\ x_1^2 - x_1 x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})V_{n-1}$$

这就得到了递推关系，反复使用，得

Vn = (xn– x1)(xn –x2) ··· (xn– xn–1)Vn–1

= (xn– x1)(xn –x2) ··· (xn– xn–1) (xn–1– x1)

··· (xn–1– xn–2)Vn–2

= …

= (xn– x1)(xn –x2) ··· (xn– xn–1) (xn–1– x1) ·

·· (xn–1– xn–2) ··· (x2– x1)

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

4 行列式在几何上的应用

a.求过平面上两点的直线方程

设**P1(x1，y1)**、**P2(x2，y2)**为平面上两点，显然，过这两点的直线方程为：

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

将该方程变形为：**(y – y1) (x2 – x1) – (y2 – y1) (x – x1) = 0**，即

$$\begin{vmatrix} y - y_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0$$

b.求过不在同一直线上三点的平面方程

引理 设**a={ax，ay，az}**，**b={bx，by，bz}**，**c={cx，cy，cz}**为三向量，则**a**，**b**，**c**共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

设**P1(x1,y1,z1)**、**P2(x2,y2,z2)**、**P3(x3,y3,z3)**为空间上不在同一直线上的三点，则**P1**、**P2**、**P3**确定一个平面π。

设**P(x,y,z)**为平面π上任一点，以**P1**为起点分别作以**P2**、**P3**、**P**为终点的向量**a**、**b**、**c**，则**a**、**b**、**c**共面且**a={x2–x1，y2–y1，z2–z1}**，**b={x3–x1，y3–y1，z3–z1}**，**c={ x–x1，y–y1，z–z1}**。

由引理知：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

可以验证满足上式的点**P(x,y,z)**都在平面π上，所以上式是过**P1(x1,y1,z1)**、**P2(x2,y2,z2)**、**P3(x3,y3,z3)**三点的平面方程。