第二章　矩 阵

第一节 矩阵的定义及其基本运算

1.矩阵的定义

定义1 由m×n个数a_{ij}（i=1，2，…，m；j=1,2，…，n），排成m行n列的数表：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为**m行n列矩阵**，简称为**m×n矩阵**。这m×n个数称为矩阵A的元素，a_{ij}叫做**矩阵A的第i行第j列元素**。元素是实数的矩阵叫做**实矩阵**，元素是复数的矩阵叫做**复矩阵**。

本教程中的矩阵除特别说明外，都指实矩阵。通常用大写的拉丁字母A、B、C等表示矩阵。有时为了指明矩阵的第i行第j列元素为a_{ij}，可将A记作$A=(a_{ij})_{m\times n}$或$A=(a_{ij})$，也可将m×n矩阵A记为$A_{m\times n}$。当A的行数与列数相等时，称A为n阶方阵或n阶矩阵。显然，一阶矩阵就是一个数。

只有一行的矩阵$A=（a_1，a_2，\cdots，a_n）$

叫做行矩阵；只有一列的矩阵叫做列矩阵。

两个矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们

为同型矩阵。如果$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$是同型矩阵，

并且它们的对应元素相等，即

$a_{ij}=b_{ij}$ （$i=1，2，\cdots，m$；$j=1，2，\cdots，n$），

那末就称矩阵A与矩阵B相等，记作 $A=B$。元素

都是零的矩阵，记作0。注意不同型的零矩阵是

不同的。

II 几种特殊矩阵

a) 对角矩阵**(diagonal matrix)**，如下的矩阵称为对角矩阵，记为**diag**（ $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ ）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b) 数量矩阵(scalar matrix)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

c) 三角矩阵(triangular matrix)

上三角矩阵(upper triangular matrix)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

d)　对称阵(symmetric matrix）和反对称阵(anti-symmetric matrix)

- 如果n阶矩阵A=（a_{ij}）的元素满足$a_{ij}=a_{ji}$（i，j=1，2，…，n），则称A为n阶**对称矩阵**，如

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

如果n阶矩阵A=（a_{ij}）的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}$（i，j=1，2，…，n），则称A为n阶反对称矩阵。显然，故$a_{ii}=0$（i=1，2，…，n）

如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

III 矩阵的运算

矩阵的加法

设有两个m×n的矩阵A=（a_{ij}），B＝（b_{ij}），则矩阵A和B的和记作A+B 。即：

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

易证，矩阵加法满足下列运算规律（设A、B、C都是$m \times n$矩阵）：

a) $A+B=B+A$；

b) $(A+B)+C=A+(B+C)$。

设矩阵$A=(a_{ij})$，记$-A=(-a_{ij})$，$-A$称为A的负矩阵，显然有$A+(-A)=0$。

由此定义矩阵的减法运算为

$$A-B=A+(-B)$$

数与矩阵相乘

数λ与矩阵**A**的乘积记作λ**A**或**A**λ，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

易证，数乘矩阵满足下列运算规律（设A、B为$m\times n$矩阵，λ、μ为数）：

(i). $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$；

(ii). $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$；

(iii). $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$。

矩阵与矩阵相乘

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则矩阵A和矩阵B的乘积矩阵$C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

（$i=1，2，\cdots，m$；$j=1，2，\cdots，n$）

记作$C=AB$。

对于矩阵的乘法需注意以下三点：

第一，只有矩阵**A**的列数等于**B**的行数时，**AB**才有意义。

第二，乘积**C**=（c_{ij}）$_{m\times n}$的第**i**行第**j**列的元素等于矩阵**A**的第**i**行的每一个元素与矩阵**B**的第**j**列的对应元素的乘积之和。

第三，乘积**C**的行数等于矩阵**A**的行数，列数等于矩阵**B**的列数。

例1　求AB和BA。其中

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

解：

$$AB=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

$$BA=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{bmatrix}$$

例2　求AB和BA。其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

解：

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

在上述两个例子中都有**AB≠BA**，即矩阵乘法不满足乘法交换律，为此将**AB**称为用**A**左乘**B**，而将**BA**称为**A**右乘以**B**。还应注意到在例**5**中：**A**，**B**均为非零矩阵，但**AB**却为零矩阵。

由定义可以验证矩阵的乘法满足以下运算规律：（假设运算都是可行的）

- **(i).** 结合律：（**AB**）**C=A**（**BC**）；
- **(ii).** 左分配律：**A**（**B+C**）**= AB + AC**；
- **(iii).** 右分配律：（**B+C**）**A = BA + CA**；
- **(iv).** λ（**AB**）**=**（λ**A**）**B = A**（λ**B**）。（λ为常数）

对于单位矩阵**E**,容易验证

$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$， $A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$。

有了矩阵的乘法，就可以定义**n**阶方阵的幂。设**A**是**n**阶方阵，定义

$A^1 = A$，$A^2 = A^1 A^1$，…，$A^{k+1} = A^k A^1$，

其中**k**为正整数。这就是说，A^k就是**k**个**A**相乘。显然，只有方阵的幂才有意义。由于矩阵乘法适合结合律，所以方阵的幂满足以下运算规律：

$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}$，$(A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}$

不过，一般 $(AB)^k \neq A^k B^k$。

矩阵的转置

把矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的行换成同序数的列所得到的新矩阵，叫做**A的转置矩阵(transpose)**，记作$\mathbf{A}'$或$\mathbf{A}^T$。显然，$\mathbf{A}'=(a_{ji})_{n\times m}$

矩阵的转置也是一种运算，易证它满足下述运算规律（假设运算都是可行的）：

(i) $(A')' = A$；

(ii) $(A+B)' = A' + B'$；

(iii) $(\lambda A)' = \lambda A'$；

(iv) $(AB)' = B'A'$。

方阵的行列式

由n阶方阵A的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），叫做方阵A的行列式，记作$|A|$ 或 $\det A$。

由方阵A确定行列式$|A|$的运算满足下述运算规律（设A，B为n阶方阵，λ为数）：

(i). $|A'| = |A|$（行列式性质1）；

(ii). $|\lambda A| = \lambda^n |A|$；

(iii). $|AB| = |A|\,|B|$。