第二节 分块矩阵

- 在理论研究及一些实际问题中，经常遇到阶数很高或结构特殊的矩阵。对于这些矩阵，在运算时常常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算。我们将矩阵**A**用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为**A**的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-5\\0&0&1&5&5\\\hline 0&0&0&6&0\\0&0&0&4&8\end{array}\right]$$

- 按虚线所示，矩阵**A**被分成**4**个子块，则

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E_3\ ,A_{12}=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-5\\5&5\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_3&A_{12}\\0_{2\times3}&A_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{0}_{2\times3},A_{22}=\begin{bmatrix}6&0\\4&8\end{bmatrix}$$

分块矩阵的基本运算

- 分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似

    1. 加法

    2. 转置

分块矩阵转置时，不但要将分块“行列”互换，而且行列互换后的各子矩阵都要转置。

    3. 乘法

❖ 设**A**为**m×s**矩阵，**B**为**s×n**矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pt} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$$

- A_{ij}为$m_i \times s_j$子块（$i=1，2，…，p；j=1，2，…，t$），且$m_1 + m_2 + … + m_p = m$，$s_1 + s_2 + … + s_t = s$；
- B_{jk}为$s_j \times n_k$子块（$j=1，2，…，t；k=1，2，…，r$），且$k_1 + k_2 + … + k_r = n$，$s_1 + s_2 + … + s_t = s$。

- 令$AB = C$，则

$$AB = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{bmatrix},$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + ? + A_{it}B_{tj} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \qquad \left(i = 1, 2, \cdots, p; j = 1, 2, \cdots, r\right)$$

❖ 分块矩阵的行列式与**Laplace**定理

1. 设**A**为**n**阶方阵，**M**为**A**的一个**k**阶子式，在**A**中去掉**M**所在的**k**行和**k**列的元素，由剩下的元素按原来的相对位置组成的**n–k**阶行列式**N**，称为**k**阶子式**M**的余子式。

2. 如果**k**阶子式*M*在**A**中所在的行和列的标号分别为i_1，i_2，…，i_k；j_1，j_2，…，j_k，则称

$$B=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N$$

为**k**阶子式**M**的代数余子式

- 定理（**Laplace**定理）设**n**阶矩阵$A=(a_{ij})$，在**A**中任意取定**k**行（**1≤ k ≤n**），由这**k**行组成的所有**k**阶子式M_i（**i=1，2，…，t**）与它们的代数余子式B_i（**i=1，2，…，t**）的乘积之和等于**detA**，即

$$\det A = M_1B_1 + M_2B_2 + \cdots + M_tB_t, \quad (t = C_n^k)$$

其中B_i是子式M_i的代数余子式（**i=1，2，…，t**）。

分块对角矩阵（准对角矩阵）

形如

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_s \end{bmatrix}$$

其中**A_i（$i=1$，2，…，s）**均为方阵，且其余子块均为零矩阵的分块矩阵，称为分块对角矩阵或准对角矩阵。

- 由Laplace定理知，分块对角矩阵的行列式具有下述性质：$|A|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_s|$
- 由此性质可知，若$|A_i| \neq 0$（i=1，2，…，s），则$|A| \neq 0$，并有

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

❖ **思考题1：设A，B分别为r和s阶方阵，则行列式**

$$\begin{vmatrix} O & B_s \\ A_r & O \end{vmatrix} = ?$$

为什么？　　　答案：

$$\begin{vmatrix} O & B_s \\ A_r & O \end{vmatrix} = (-1)^{rs} |A||B|$$

❖ 思考题2：设A，B分别为r和s阶方阵，则行列式

$$\begin{vmatrix} A_r & C_{r\times s} \\ O & B_s \end{vmatrix} = ?$$

为什么？　　　答案：

$$\begin{vmatrix} A_r & C_{r\times s} \\ O & B_s \end{vmatrix} = |A||B|$$

❖ You can download these powerpoint files on the Internet by checking the mail box of linearalgebra078@sina.com with password "linearalgebra".