第三节 矩阵的秩和初等变换

❖ 矩阵的秩(Rank of a matrix)

定义1 在**m×n**矩阵**A**中，任取**k**行**k**列（$k \le m$，$k \le n$），位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在**A**中所处的位置次序而得的**k**阶行列式，称为**矩阵A的k阶子式**。

定义2 如果矩阵**A**有一个不等于零的**r**阶子式**D**，并且所有的**r+1**阶子式（如果有的话）全为零，则称**D为矩阵A的最高阶非零子式**，称**r为矩阵A的秩**，记为**R(A) = r**，并规定零矩阵的秩等于零。

- 如果A是n阶方阵，则$R(A) \le n$。当$R(A) = n$时，称**A为满秩矩阵**，否则称为**降秩矩阵**。显然，A为满秩矩阵的充分必要条件是A的n阶子式不等于零，即$|A| \neq 0$。
- 如果$R(A) = r$，容易证明，对$k > r$，A中的k阶子式（若存在）全部等于零。（事实上，由矩阵秩的定义知道，r+1阶子式全为零；k=r+2时，将k阶子式按行（或列）展开，得到r+2个r+1阶子式的线性组合，而这些r+1阶子式全为零，故该k阶子式为零。于是，可用数学归纳法证明）

对矩阵A，由矩阵秩的定义可得如下两个结论：

- （1）　　若A中有r阶非零子式，则$R(A) \geqslant r$；
- （2）　　若A中所有r阶子式全为零，则$R(A) < r$。

例1　求如下矩阵的秩

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：

可以验证，A中有一个二阶子式不为0，而其所有的3阶子式全为0，故R(A)＝2。

对于B，显然R(B)＝3。

- 上例中的**B**这种类型的矩阵称为行阶梯型矩阵。其特点为：

1. 元素全为零的行（如果有的话），位于矩阵的最下面；

2. 自上而下各行中的第一个非零元素左边的零的个数，随着行数的增加而增加。

以后，我们一般都是用初等变换的方法把矩阵化为这种行阶梯型矩阵，再求秩。

❖ 矩阵的初等变换(**Elementary operation**)

定义3 下面的三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(i). 对调两行（对调**i**、**j**行，记作$r_i \leftrightarrow r_j$）

(ii). 以非**0**数乘以某一行的所有元素；

（第**i**行乘**k**，记作kr_i）

(iii).把某一行所有元素的**k**倍加到另一行对应的元素上去（第**i**行的**k**倍加到第**j**行上，记作r_j+kr_i把定义中的"行"换成"列"，即得矩阵的初等列变换的定义（所用的记号分别为$c_i \leftrightarrow c_j$, kc_i，c_j+kc_i）。

矩阵的初等行变换和初等列变换，统称为**初等变换**。

显然，每一种初等变换都是可逆的，并且其逆变换也是同一种初等变换。

❖ **定义4** 如果矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，则称**矩阵A与矩阵B等价(Equivalent)**，记为A～B。

根据定义不难证明，矩阵的等价满足下述性质：

a) 反身性：A～A；

b) 对称性：若A～B，则B～A；

c)传递性：若A～B，而B～C，则A～C。

定理**1**　如果**A～B**，则**R(A)=R(B)**。即初等变换不改变矩阵的秩。

证明思想：只需证明任何一种初等变换对行列 式是否为**0**没有影响即可。

如果我们经过初等变换将矩阵**A**变成阶梯型矩阵**B**，得到矩阵**B**的秩，则由定理**1**知，矩阵**A**的秩就等于矩阵**B**的秩。

❖ 例: 求**R(A)**,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

❖ 解:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

显然B是阶梯型矩阵，R(B)=2，所以，由定理1知R(A)=2。

- 进一步，将**B**变为**C**：

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=C$$

则**C**的特点为：**C**中的每一个非零行的第一个非零元素等于**1**，且含这个元素的列中其它元素都是零。称矩阵**C**为行的最简形矩阵（简称行最简形矩阵）。

❖ 如果**A = $(a_{ij})_{m\times n}$**，**R(A) = r**，则称矩阵

$$\begin{bmatrix} E_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为**矩阵A的标准形(Canonical Form)**（零块可以减少或没有）。事实上，在最简形矩阵的基础上再利用初等列变换，就可得到矩阵的标准形。

- **推论1: A～B的充分必要条件是A，B的标准形相同。**
- **推论2：若A，B为同型矩阵，则A～B的充分必要条件是R(A)＝R(B)。**

❖ 初等方阵

定义 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

对应于三种初等变换，可以得到三种初等矩阵。

- 对于n阶单位矩阵E，交换E的第i、j行（列）（i<j），得到的初等矩阵记作：

$$
E(i,j)=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \\
& & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
& & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
& & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
& & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
\\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\
\end{matrix}
$$

- 用非零数**k**乘以**E**的第**i**行（或**i**列），得到的初等矩阵记作：

$$
E(i(k)) = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & k & & \cdots & \\
& & & & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & & i\text{列} & & & \end{array} &
\end{array}
$$

- 将**E**的第**j**行的**k**倍加到第**i**行（或第**i**列的**k**倍加到第**j**列），得到的初等矩阵记作：

$$
E(i,j(k)) = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & \cdots & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & \cdots & \\
 & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccc}
\quad & \quad & i\text{列} & \quad & j\text{列} & \quad & \quad
\end{array}
&
\end{array}
$$

- 可以直接验证，初等矩阵的转置矩阵仍为初等矩阵；
- 矩阵初等变换与初等矩阵有着非常密切的关系，容易证明下述定理成立。

定理2 设$A=(a_{ij})$是$m\times n$矩阵，则

- (1)对A进行一次初等行变换，相当于用一个m阶的初等矩阵左乘A；
- (2)对A进行一次初等列变换，相当于用一个n阶的初等矩阵右乘A。

- 已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

分别将**A**的第一、二行互换和将**A**的第一列的**–2**倍加到第二列，求出相应的初等矩阵**,**并用矩阵乘法将这两种变换表示出来。

❖ 解　交换**A**的第一、二行，即用二阶初等矩阵

$$E(1,2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

左乘**A:**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- 将**A**的第一列的**–2**倍加到第二列，即用三阶初等矩阵

$$E(1,2(2))=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

右乘**A**:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 6\end{bmatrix}$$