第四节　逆矩阵

一、逆矩阵的定义

定义 对于**n**阶方阵**A**，如果有一个**n**阶方阵**B,** 使得

AB=BA=E。

则称**矩阵A是可逆的**，并把**方阵B称为A的逆阵(inverse matrix)**。

逆矩阵的初等性质:

1.) 如果**A**是可逆的，则**A**的逆阵是唯一的。

这是因为：设**B**、**C**都是**A**的逆阵，则有

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C,$$

所以**A**的逆阵是唯一的。以后，我们就记此唯一的逆阵为A^{-1}。

2.) 当**A**可逆时,

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

二、矩阵A可逆的充要条件

定理1 **若方阵A可逆，则|A| ≠ 0 。**

证明 **A可逆，即有A的逆矩阵A^{-1}，使得AA^{-1} = E。故$|A||A^{-1}|=|A||A^{-1}|$ = |E| = 1，所以|A| ≠ 0。**

定理2 若|A| ≠ 0，则方阵A可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},$$

其中A^*为方阵A的伴随阵:

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

证明: 设$A=(a_{ij})$，记$AA^*=(b_{ij})$，则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|A|\delta_{ij},$$

故 $$AA^*=(|A|\delta_{ij})=|A|(\delta_{ij})=|A|E。$$

类似地,

$$A^*A=|A|E。$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

故

$$A\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}A^*A=E$$

- **定义** 如果n阶方阵A的行列式det A ≠ 0，则称A为非奇异(nonsingular)矩阵（或称为非退化(nondegenerate)矩阵），否则称A是奇异矩阵（或称为退化矩阵）。由上面的两个定理可知：
- **定理3** （可逆的充分必要条件）A是可逆矩阵的充分必要条件是|A| ≠ 0。即可逆方阵就是非奇异方阵。

- 推论：若$AB=E$（或$BA=E$），则$B=A^{-1}$。

  方阵的逆阵满足下述运算规律：

- a)若A可逆，　则A^{-1}也可逆，且（A^{-1}）$^{-1}$ $=A$；
- b)若A可逆，$\lambda\neq 0$，则λA可逆，且
- c)若A、B是同阶方阵且均可逆，则AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

证明 :$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=E$，

由推论知结论成立。

- d)若A可逆，则A'可逆，且$(A')^{-1}=(A^{-1})'$。

  证明　$A'(A^{-1})'=(A^{-1}A)'=E'=E$，由推论知结论成立。

例1 判定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

是否可逆。若可逆，求出其逆矩阵。

解 由于

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

故**A**可逆**.**

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

❖ 例2 已知 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 且 $ad-bc\neq 0$. 求A^{-1} 。

解 $|A|=ad-bc\neq 0$，故A可逆。

且易得

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

❖ **例3** 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix},$$

求矩阵X满足 **AXB=C** 。

分析　若**A**、**B**可逆，则用$\mathbf{A^{-1}}$左乘上式，$\mathbf{B^{-1}}$右乘**AXB=C**，有

$$\mathbf{A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}},$$

即　　$\mathbf{X=A^{-1}CB^{-1}}$。

Solution:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix},$$

So

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

三、求逆矩阵的初等变换方法

关于初等矩阵的逆矩阵，我们有如下结论：初等矩阵均为可逆矩阵，并且其逆矩阵仍为同类型的矩阵。其中

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j);$$

$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}));$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)).$$

❖ 根据初等矩阵的性质和可逆矩阵是满秩矩阵，我们可以得到可逆矩阵的初等分解定理：

定理4　设A为可逆矩阵，则存在有限个初等矩阵P_1，P_2，…，P_s，使$A=P_1P_2\ldots P_s$

证　因A为可逆矩阵，A～E，故E经过有限次初等变换可变成A，也就是存在有限个初等矩阵P_1，P_2，…，P_s，使

$$P_1P_2\ldots P_tEP_{t+1}P_{t+2}\ldots P_s = A，（1\leqslant t\leqslant s）$$

即 $A=P_1P_2\ldots P_s$。

显然，若存在s个初等矩阵P_1，P_2，…，P_s，使$A=P_1P_2\dots P_s$，则因为初等矩阵都是可逆矩阵，所以$|A|=|P_1|\cdot|P_2|\cdot\dots\cdot|P_s| \neq 0$，故A可逆。从而，结合上述定理我们得到：方阵A可逆的充分必要条件是存在s个初等矩阵P_1，P_2，…，P_s，使$A= P_1P_2\dots P_s$。

推论1 $m\times n$矩阵$A\sim B$的充分必要条件是：存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使$PAQ = B$。

推论2 设**A**是**m×n**阶矩阵，**R**（**A**）**= r**，则存在**m**阶可逆矩阵**P**及**n**阶可逆矩阵**Q**，使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 设A为n阶可逆矩阵，则A^{-1}也是n阶可逆矩阵。因此由定理6，A^{-1}可以表示为有限个初等矩阵的乘积，即存在n阶初等矩阵P_1，P_2，…，P_s，使$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$
- 上式也可写成

$$(*)\quad A^{-1}=P_1P_2\cdots P_sE$$

将此式的两边同时右乘A，得到

$$A^{-1}A=P_1P_2\cdots P_sA$$

即

$$(**)\quad E=P_1P_2\cdots P_sA$$

- 比较（*）式和（**）式可以看出：当对矩阵A进行有限次初等行变换，将A化成单位矩阵E时，对单位矩阵E进行相同的初等行变换，就可以将E化成A^{-1}。
- 于是，我们可以采用下列方式求A^{-1}：将A和E并排放在一起，组成一个n×2n矩阵（A，E），对（A，E）作一系列初等行变换，将其左半部分化成单位矩阵E，这时其右半部分就是A^{-1}。即

$$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,A^{-1})$$

- 例：求A^{-1}，其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A,E)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \div 6} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-4r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+\frac{1}{2}r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{r_1+5r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

- 完全类似我们可以用初等列变换来求矩阵**A**的逆矩阵。即

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

- 实际上我们还可以用初等变换方法求解一般的矩阵方程**AX＝B或XH＝G，即求X＝A^{-1}B或X＝GH^{-1}**。此时可按如下方法进行：

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ GH^{-1} \end{pmatrix}$$

❖ 例：求解矩阵方程 **AX=A + 2X**，其中

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

❖ 解：由**AX=A + 2X**可得

（A – 2E）X = A

因为

$$\det(A-2E)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

❖ 所以 $$X=(A-2E)^{-1}A$$

$$(A-2E,A)=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right]$$

因此， $$X=\begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

❖ 线性方程组与矩阵方程的关系

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其实就是矩阵方程 **AX=B,** 其中**A**为上述方程组的系数矩阵，**X**为由**n**个未知数组成的列矩阵，而**B**为上述方程组右边的数组成的列矩阵。这由矩阵的乘法定义易直接验证。

- 因此上述方程组可用初等变换来求解

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}$$

上述过程实际上就是我们非常熟悉的 **Gauss**消元法。这也是初等行变换的来源。