# 第五节　综合例题

例1　设$P^{-1}AP=\Lambda$,

其中$P=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

求$A^{11}$.

解　直接演算可得

$$\Lambda^k=\begin{pmatrix}(-1)^k & 0\\ 0 & 2^k\end{pmatrix},\text{故}\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}(-1)^{11} & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}$$

且$A^k=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^k P^{-1}$,

$$\text{故}A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{11} & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2^{13} & 4+2^{13}\\ -1-2^{11} & -4-2^{11}\end{pmatrix}.$$

❖ 注： 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$

A为n阶方阵，则称

$$f(A)=a_0E_n+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

为A的一个m次矩阵多项式。可以归纳证明

若 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵，则

$$f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$$

当$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$时， $f(x)$为多项式,则

$$f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \vdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

例2　设$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，求$A^k$.

解　$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=}\Lambda+B$

则可归纳得$A^k=\Lambda^k+\mathrm{C}_k^1\Lambda^{k-1}B+\mathrm{C}_k^2\Lambda^{k-2}B^2+\cdots+B^k$.

(此处要用到数量矩阵$\Lambda$和任意同阶方阵可交换。)

且可直接得

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},B^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O.$$

所以$A^k=\Lambda^k+\mathrm{C}_k^1\Lambda^{k-1}B+\mathrm{C}_k^2\Lambda^{k-2}B^2$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^k & \mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1} & \mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & \mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

当$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$时，　$f(x)$为多项式,则归纳得

$$f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2} f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

由此可解清华版67、73题。

例3 设n阶方阵A的伴随矩阵为$A^*$,证明：

（1）若$|A|=0$，则$|A^*|=0$。

（2）$|A^*|=|A|^{n-1}$。

证明：由伴随矩阵的定义显然有

$$AA^*=A^*A=|A|E_n,$$

两边取行列式即得 $|A||A^*|=\det(|A|E_n)=|A|^n$,

故当$|A|$不等于0时，（2）是显然的。而

只要我们证明了（1），则（2）对于$|A|=0$

的矩阵A也是成立的。下面我们证明（1）。

- (反证法）假设则$|A^*|\neq 0$，则$A^*$可逆，于是在$AA^*=|A|E_n$两边右乘$(A^*)^{-1}$,有

  $A = |A|E_n(A^*)^{-1} = O$（因为$|A|=0$），

因此A的伴随矩阵$A^*$应该为O。与假设矛盾！

❖ 例4 设A为n阶方阵满足$A^2-A-2E=O$，证明A和$A+2E$均可逆，求它们的逆矩阵。

解 由$A^2-A-2E=O$易得

$(A-E)A=2E$, 即 $\frac{1}{2}(A-E)A=E.$

故由逆矩阵的定义可得A可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$$

类似可求得$(A+2E)(A-3E)=-4E.$

即

$$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$$

- 作业（同济三版）

**P66～69：3，4(1)(2)(5)，**

**11(1)(5)(**用伴随矩阵法和初等变换方法两种方法各作一遍**)**

**21.**

**P93~95: 1(3)，12**

例5　设 $Q=\begin{bmatrix} A_n & B \\ C & D_m \end{bmatrix}$，且A可逆，证明

|Q|=|A||D－CA$^{-1}$B|（行列式第一降阶定理）

证明：对分块矩阵作初等行变换和列变换，将之化为分块对角阵。用初等方阵的记号表示出来,即

$$\begin{bmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ O & E_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

在上式两边取行列式即得要证明的结论。（由此例可解63题）

习题补充题提示：

7，8题：要用到方程组的通解的思想，可先不管。

27～29：先把要求的矩阵的一般形式B设出来，再根据AB＝BA得到$n^2$个等式确定出B的元素或元素之间的关系。(繁但不难）

35～37：C对称的充要条件为$C = C^T$。

C反对称的充要条件为$C = -C^T$。

38:　A对称的充要条件为$a_{ij}=a_{ji}$.

**57:** 用初等列变换将矩阵化为主对角线为**1**的下三角矩阵。然后用初等方阵的记号把所作的初等变换过程表示出来即可。

**64～65，77：** 先设 $A^{-1}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ 用分块矩阵乘法由**AA**$^{-1}$**＝E**解出**A**$^{-1}$的**4**个子阵。

**66：** 用**65**题的结论作为方法。

**68：** 用分块矩阵的初等行变换化为分块三角阵，再取行列式。

**74**：先求出***f***(***x***)，***g***(***x***)的表达式，在代***x***为**A**。

**79～80**：数学归纳法。

作业：**10, 15, 21, 40(1)(4), 41(2), 49, 56, 68, 77**。