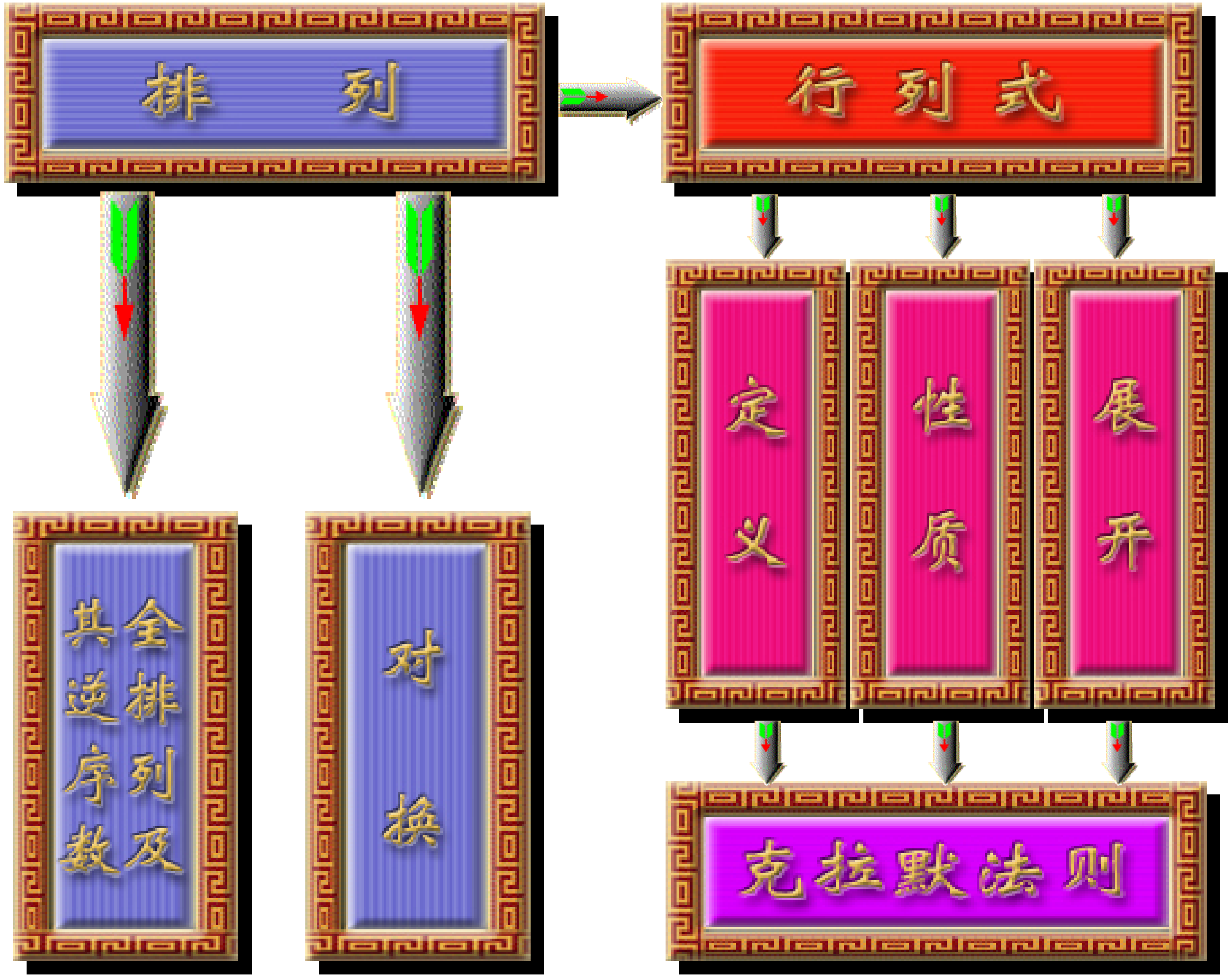
第 2 章　行列式

习 题 课

一、主要内容

二、典型例题

三、测试题


排列
行列式
全排列及其逆序数
对换
定义
性质
展开
克拉默法则

一、主要内容

1、全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（或排列）.

n 个不同的元素的所有排列的种数用 P_n 表示，且 $P_n = n!$.

2、逆序数

在一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$中，若数 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个**逆序**.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

3、计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在 $1,2,\cdots,n-1,n$ 前面比它大的数码之和，即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n 个元素的逆序数，这 n 个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

4、对　换

定义　在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，称为一次对换．将相邻两个元素对调，叫做相邻对换．

定理　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性．

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，
偶排列调成标准排列的对换次数为偶数．

5、n阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 $p_1\, p_2 \cdots p_n$ 为自然数$1,2,\ldots,n$的一个排列;t为这个排列的逆序数; $\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对$1,2,\ldots,n$的所有排列取和.

n阶行列式 D亦可定义为

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

其中t为行标排列 $p_1 p_2 \dots p_n$的逆序数.

6、n阶行列式的性质

1)行列式与它的转置行列式相等,即$D = D^T$.

2)互换行列式的两行(列),行列式变号.

3)如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

4)行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k,等于用数k乘此行列式.

5)行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可 以提到行列式符号的外面 .

6)行列式中如果有两行 (列) 元素成比例 ,则此行列式为零 .

7)若行列式的某一列 (行) 的元素都是两数之和 ,则此行列式等于两个行列 式之和 .

8)把行列式的某一列 (行) 的各元素乘以同一数 ,然后加到另一列 (行) 对应的元素上去 ,行列式的值不变 .

7、行列式按行（列）展开

1）余子式与代数余子式

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式.

2）关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, \text{当} i = j; \\ 0, \text{当} i \neq j. \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, \text{当} i = j; \\ 0, \text{当} i \neq j. \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当} i = j; \\ 0, \text{当} i \neq j. \end{cases}$$

8、克拉默法则

如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$

的系数行列式 $D \neq 0$,那么它有惟一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n.$$

其中 D_j（$j = 1,2,\cdots,n$）是把系数行列式 D中第j列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots b_n$所得到的行列式 .

克拉默法则的理论价值

定理 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,那么它一定有解，且解 惟一.

定理 如果上述线性方程组无 解或有两个不同的解，则它的系数行列式 必为零.

定理 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$,那么它没有非零解.

定理 如果上述齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为零.

二、典型例题

(一) 计算排列的逆序数

(二) 计算（证明）行列式

(三) 克拉默法则

（一）计算排列的逆序数

例 1　求排列 $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$ 的逆序数,并讨论奇偶性.

解　分别算出排列中每个元素前面比它大的数码之和，即算出排列中每个元素的逆序数.

$2k$排在首位,故逆序数为0;

1的前面比1大的数有一个$(2k)$,故逆序数为1;

$(2k-1)$的前面比$(2k-1)$大的数有一个$(2k)$,故逆序数为1;

2的前面比2大的数有两个$(2k,2k-1)$,故逆序数为2;

$2k-2$的前面比$2k-2$大的数有两个$(2k,2k-1)$,故逆序数为2;

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$k-1$的前面比$k-1$大的数有$k-1$个$(2k,2k-1,\cdots,k+2)$,故逆序数为$k-1$;

$k+1$的前面比$k+1$大的数有$k-1$个$(2k,2k-1,\cdots,k+2)$,故逆序数为$k-1$;

k的前面比k大的数有k个$(2k,2k-1,\cdots,k+1)$,故逆序数为k;

于是排列的逆序数为

$$t = 0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k$$

$$= \frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2}+k$$

$$= k^2$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列，

当 k 为奇数时，排列为奇排列.

(二)计算（证明）行列式

1　用定义计算（证明）

例 2　用行列式定义计算

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　设 D_5 中第1,2,3,4,5行的元素分别为 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}, a_{5p_5}$，那么，由 D_5 中第1,2,3,4,5行可能的非零元素分别得到

$$p_1 = 2,3; \qquad p_2 = 1,2,3,4,5;$$

$$p_3 = 1,2,3,4,5; \quad p_4 = 2,3; \quad p_5 = 2,3.$$

因为 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 在上述可能取的代码中，一个5元排列也不能组成，

故 $D_5 = 0.$

评注　本例是从一般项入手，将行标按标准顺序排列，讨论列标的所有可能取到的值，并注意每一项的符号，这是用定义计算行列式的一般方法.

注意　如果一个 n阶行列式中等于零的元素比 n^2-n还多，则此行列式必等于零.

例 3　设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D_1 = D_2$.

证明　由行列式的定义有

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中t是排列$p_1 p_2\cdots p_n$的逆序数.

$$D_2=\sum(-1)^t(a_{1p_1}b^{1-p_1})(a_{2p_2}b^{2-p_2})\cdots(a_{np_n}b^{n-p_n})$$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)},$$

其中t是排列$p_1 p_2\cdots p_n$的逆序数.

而 $$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 + 2 + \cdots + n,$$

所以 $$D_2 = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = D_1.$$

评注 本题证明两个行列式相等，即证明两点，一是两个行列式有完全相同的项，二是每一项所带的符号相同．这也是用定义证明两个行列式相等的常用方法.

2　利用范德蒙行列式计算

利用范德蒙行列式计算行列式，应根据范德蒙行列式的特点，将所给行列式化为范德蒙行列式，然后根据范德蒙行列式计算出结果。

例 4　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解 D_n中各行元素分别是一个 数的不同方幂，方幂次数自左至右按递升次 序排列，但不是从 0变到 $n-1$，而是由1递升至 n.若提取各行的公因子， 则方幂次数便从 0增至 $n-1$，于是得到

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为n阶范德蒙行列式，由范德蒙行列式知

$$
\begin{aligned}
D_n &= n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \\
&= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1) \\
&\quad \bullet (3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)] \\
&= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.
\end{aligned}
$$

评注　本题所给行列式各行（列）都是某元素的不同方幂，而其方幂次数或其排列与范德蒙行列式不完全相同，需要利用行列式的性质（如提取公因子、调换各行（列）的次序等）将此行列式化成范德蒙行列式.

3　用化三角形行列式计算

例 5　计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解　将第$2,3,\cdots,n+1$列都加到第一列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子，得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

将第1列的$(-a_1)$倍加到第 2列，将第 1列的$(-a_2)$倍加到第 3列，$\cdots$，将第1列的$(-a_n)$倍加到最后一列，得

$$D_{n+1} = (x + \sum_{i=1}^{n} a_i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x + \sum_{i=1}^{n} a_i) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

评注　本题利用行列式的性质，采用“化零”的方法，逐步将所给行列式化为三角形行列式．化零时一般尽量选含有 1 的行（列）及含零较多的行（列）；若没有 1 ，则可适当选取便于化零的数，或利用行列式性质将某行（列）中的某数化为1；若所给行列式中元素间具有某些特点，则应充分利用这些特点，应用行列式性质，以达到化为三角形行列式之目的．

4　用降阶法计算

例 6　计算

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

解　将 D_4 的第2、3、4行都加到第1行，并从第1行中提取公因子 $a+b+c+d$，得

$$D_4 = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix},$$

再将第2、3、4列都减去第1列，得

$$D_4 = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}.$$

把上面右端行列式第 2行加到第 1行，再从第 1行中提取公因子 $a-b-c+d$，得

$$D_4=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix},$$

再将第2列减去第1列，得

$$D_4 = (a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d-c & a-d & b-c \\ c-d & b-c & a-d \end{vmatrix},$$

按第1行展开，得

$$D_4 = (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)\bullet[(a-d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

$$\bullet(a+b-c-d)(a-b+c-d)$$

评注　本题是利用行列式的性质将所给行列式的某行（列）化成只含有一个非零元素，然后按此行（列）展开，每展开一次，行列式的阶数可降低 1阶，如此继续进行，直到行列式能直接计算出来为止（一般展开成二阶行列式）．这种方法对阶数不高的数字行列式比较适用．

5　用拆成行列式之和（积）计算

例 7　证明

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\beta+\alpha) & \sin 2\beta & \sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\beta) & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

证

$$左边 = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6　用递推法计算

例 8　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

解　依第n列把D_n拆成两个行列式之和

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

右端的第一个行列式，将第n列的(-1)倍分别加到第$1,2,\cdots,n-1$列，右端的第二个行列式按第n列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+x_n D_{n-1},$$

从而 $D_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_nD_{n-1}$.

由此递推，得

$$D_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-2}a+x_{n-1}D_{n-2},$$ 于是

$$D_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n$$
$$+x_nx_{n-1}D_{n-2}.$$

如此继续下去，可得

$$D_n=x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n+\cdots$$
$$+x_1x_2ax_4\cdots x_n+x_nx_{n-1}\cdots x_3D_2$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a\, x_n \\
&\quad + \cdots + x_1 x_2 a\, x_4 \cdots x_n \\
&\quad + x_n x_{n-1} \cdots x_3 (a\, x_1 + a\, x_2 + x_1 x_2) \\
&= x_1 x_2 \cdots x_n + a(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \cdots \\
&\quad + x_1 x_3 \cdots x_n + x_2 x_3 \cdots x_n).
\end{aligned}
$$

当 $x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$时，还可改写成

$$
D_n = x_1 x_2 \cdots x_n \left[1 + a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\right].
$$

评注

本题是利用行列式的性质把所给的 n阶行列式 D_n 用同样形式的 $n-1$阶行列式表示出来，建立了 D_n 与$n-1$阶行列式 D_{n-1}之间的递推关系。有时，还可以把给定的 n阶行列式 D_n用同样形式的比 $n-1$阶更低阶的行列式表示，建立比 $n-1$阶行列式更低阶行列式之间的递推关系.

7 用数学归纳法

例 9 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \cos n\alpha.$$

证　对阶数n用数学归纳法

因为 $D_1 = \cos\alpha,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha,$$

所以,当$n = 1, n = 2$时,结论成立.

假设对阶数小于 n的行列式结论成立 ,下证对于阶数等于 n的行列式也成立 .现将 D_n按最后一行展开,得

$$D_n = 2\cos\alpha\, D_{n-1} - D_{n-2}.$$

由归纳假设，$D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha,$

$$D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha,$$

$$\begin{aligned}D_n &= 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha\\ &=[\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha]-\cos(n-2)\alpha\\ &=\cos n\alpha;\end{aligned}$$

所以对一切自然数 n结论成立.

评注 为了将 D_n 展开成能用其同型的 D_{n-1}，D_{n-2} 表示，本例必须按第 n 行(或第 n 列)展开，不能按第1行(或第1列)展开，否则所得的低阶行列式 不是与 D_n 同型的行列式 .

一般来讲，当行列式已告诉其结果 ，而要我们证明是与自然数有关的 结论时，可考虑用数学归纳法来证明.如果未告诉结果 ，也可先猜想其结果 ，然后用数学归纳法证明 其猜想结果成立 .

小结

计算行列式的方法比较灵活，同一行列式可以有多种计算方法；有的行列式计算需要几种方法综合应用．在计算时，首先要仔细考察行列式在构造上的特点，利用行列式的性质对它进行变换后，再考察它是否能用常用的几种方法．

（三）克拉默法则

当线性方程组方程个数与未知数个数相等、且系数行列式不等于零时，可用克莱姆法则．为了避免在计算中出现分数，可对有的方程乘以适当整数，把原方程组变成系数及常数项都是整数的线性方程组后再求解.

例10 求一个二次多项式 $f(x)$,使

$$f(1)=0,\ f(2)=3,\ f(-3)=28.$$

解　设所求的二次多项式为

$$f(x) = a x^2 + bx + c,$$

由题意得

$$f(1) = a + b + c = 0,$$
$$f(2) = 4a + 2b + c = 3,$$
$$f(-3) = 9a - 3b + c = 28,$$

这是一个关于三个未知 数 a,b,c的线性方程组.

$$D = -20 \neq 0, \quad D_1 = -40,$$

$$D_2 = 60, \quad D_3 = -20.$$

由克莱姆法则，得

$$a = \frac{D_1}{D} = 2, b = \frac{D_2}{D} = -3, c = \frac{D_3}{D} = 1.$$

于是，所求的多项式为

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

例11 证明平面上三条不同的直线

$$ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$$

相交于一点的充分必要条件是 $a+b+c=0.$

证 必要性 设所给三条直线交于一点 $M(x_0, y_0)$,

则 $x=x_0, y=y_0, z=1$ 可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ bx+cy+az=0, \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$

的非零解.从而有系数行列式.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2})(a+b+c)$$

$$\bullet [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0.$$

因为三条直线互不相同,所以a,b,c也不全相同,故$a+b+c=0$.

充分性　如果$a+b+c=0$,将方程组

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ bx + cy = -a, \\ cx + ay = -b \end{cases} \qquad （1）$$

的第一、二两个方程加 到第三个方程，得

$$\begin{cases} ax + by = -c, \\ bx + cy = -a, \qquad (2) \\ \quad 0 = 0. \end{cases}$$

下证此方程组（2）有 惟一解.

如果$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$，则$ac = b^2 \geq 0$。由

$b = -(a+c)$得$ac = [-(a+c)]^2 = a^2 + 2ac + c^2$，于是

$ac = -(a^2 + c^2) \leq 0$，从而有$ac = 0$.

不妨设$a=0$,由$b^2=ac$得$b=0$.再由$a+b+c=0$得$c=0$，与题设矛盾.故

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0.$$

由克莱姆法则知，方程组(2)有惟一解.从而知方程组(1)有惟一解，即三条不同直线交于一点.

例12 有甲、乙、丙三种化肥，甲种化肥每千克含氮70克，磷8克，钾2克；乙种化肥每千克含氮64克，磷10克，钾0.6克；丙种化肥每千克含氮70克，磷5克，钾1.4克．若把此三种化肥混合，要求总重量23千克且含磷149克，钾30克，问三种化肥各需多少千克？

解 设甲、乙、丙三种化肥各需 x_1、x_2、x_3 千克,依题意得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 23, \\ 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 149, \\ 2x_1 + 0.6x_2 + 1.4x_3 = 30. \end{cases}$$

此方程组的系数行列式 $D = -\frac{27}{5}$,

又 $D_1 = -\frac{81}{5}$, $D_2 = -27$, $D_3 = -81$

由克莱姆法则，此方程 组有惟一解

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 15.$$

即甲、乙、丙三种化肥 各需**3**千克,**5**千克,**15**千克.

例13　设水银密度 h 与温度 t 的关系为

$$h(t)=a_0+a_1 t+a_2 t^2+a_3 t^3.$$

由实验测得以下数据：

t	0^0	10^0	20^0	30^0
h	13.60	13.57	13.55	13.52

求 $t=15^0, 40^0$ 时水银密度(准确到小数两位).

解 将测得的数据分别代入 $h(t)$,得方程组

$$\begin{cases} a_0 = 13.6, \\ a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 = 13.57, \\ a_0 + 20a_1 + 400a_2 + 8000a_3 = 13.55, \\ a_0 + 30a_1 + 900a_2 + 27000a_3 = 13.52. \end{cases} \quad (1)$$

将 $a_0 = 13.60$ 分别代入其余三个方程 ,得方程组

$$\begin{cases} a_1 + 10a_2 + 100a_3 = -0.003, \\ 2a_1 + 40a_2 + 800a_3 = -0.005, \\ 3a_1 + 90a_2 + 2700a_3 = -0.008. \end{cases} \quad (2)$$

此方程组的系数行列式 $D = 12000$,

又 $D_1 = -50$, $D_2 = 1.8$, $D_3 = -0.04$,

由克莱姆法则 ,得方程组 (2)的惟一解

$$a_1 = -0.0042,$$

$$a_2 = 0.00015,$$

$$a_3 = -0.0000033.$$

又 $a_0 = 13.60$,将以上四个数代入 $h(t)$,得

$$h(t)=13.60-0.0042t+0.00015t^{2}$$
$$-0.0000033t^{3}.$$

由此得

$$h(15)=13.56,\quad h(40)=13.46.$$

所以,当$t=15^{0},40^{0}$时,水银密度分别为13.56,13.46.

第2章　测试题

一、填空题（每小题4分，共40分）

1. 若$D_n=|a_{ij}|=a$，则$D=|-a_{ij}|=$______

2. 设x_1,x_2,x_3是方程$x^3+px+q=0$的三个根，则行列式$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=$______

3. 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1997 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1998 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$$

4.四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$

5. 设四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$,

则 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$ ________

6. 在五阶行列式中 $a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$ 的符号为 ______

7. 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数是______

8. 四阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} =$ ________

9. 若a,b为实数,则当$a =$ _____ 且$b =$ _____ 时,

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

10. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$可经____次对换后变为排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$.

二、计算下列行列式(每小题9分，共18分).

1. $$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$

三、解答题（9分）．问λ,μ取何值，齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？

四、证明(每小题8分，共24分).

1. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$
2.\ D_n = \begin{vmatrix}
2\cos\theta & 1 & & & & \\
1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\
 & 1 & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & 1 & \\
 & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\
 & & & & 1 & 2\cos\theta
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};
$$

3. 用数学归纳法证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j), (n \ge 2)$$

五、（9分）设 n 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

测试题答案

一、1. $(-1)^n a$;　　2. 0;　　3. $-1998!$;

4. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$;　5. 0;

6. $-$;　　7. -2;　　8. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$;

9. $0,0$;　　10. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

二、1. -170;　　2. $\dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$.

三、$\lambda=0$或$\mu=0$.　　五、$n!\left(1-\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{1}{j}\right)$.