第二节 向量组的线性相关性与线性无关性

❖ 定义1　设α_1，α_2，…，α_m，β是一组**n**维向量，若存在**m**个实数k_1，k_2，…，k_m使得$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$，则称$\beta$可以由$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_m$线性表示(**linear representation**)。或称α_1，α_2，…，α_m线性表示(**linear generate**)β。

例如：$\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$，$\alpha_2 = (1, 0, 3)^T$，$\alpha_3 = (3, 4, 3)^T$，则$\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2$，即存在实数$k_1 = 2$，$k_2 = 1$使得$\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，故$\alpha_3$可以由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性表示。（大家想一想，这里的常数$k_1 = 2$，$k_2 = 1$是怎么求出来的？）

❖ 定义2 设 α_1， α_2， …， α_m是一组n维向量，如果存在m个不全为0的常数k_1，k_2，…，k_m使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$，则称向量组 α_1， α_2， …， α_m线性相关(linearly dependent)；否则，称向量组α_1， α_2， …， α_m线性无关。

- 例1　若一个向量组仅由一个向量α组成，　则由定义2 易知它线性相关的充要条件是α = **0** 。
- 例2　若一个向量组仅由α，β两个向量组成，则α，β线性相关是指α，β这两个向量的分量对应成比例，换句话说，即是指α与β平行或α，β共线。

　　证明：　α，β线性相关　存在不全为**0**的两个数k_1，k_2使得$k_1\alpha + k_2\beta = 0$，不妨假设$k_1 \neq 0$，则由$k_1\alpha + k_2\beta = 0$知$\alpha = \beta$，此即说明α，β的分量对应成比例。

- 注： 类似可以证明，若一个向量组仅由α，β， γ三个向量构成，则α， β， γ线性相关的充要条件是α ， β ， γ共面。
- 上述定义2是通过否定线性相关来给出线性无关的定义，下面我们将用肯定的表述来说明线性无关这个概念。为此，我们先检查线性相关的定义。称α_1， α_2， …， α_m 线性相关是指存在不全为0的m个常数k_1，k_2，…，k_m使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_m\alpha_m=0$，这即是说：以$k_1$，$k_2$，…，$k_m$为未知数的方程（实际上，若按向量的分量来看，这是一个方程组）：

  $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_m\alpha_m=0$ 有非零解（k_1，k_2，…，k_m）。

因此，我们有下述几种等价说法：

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关
- 以$k_1, k_2, \ldots, k_m$为未知数的方程$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$没有非零解
- $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$只有零解：$k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$
- 由$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$一定可以推出 $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$
- 若$k_1, k_2, \ldots, k_m$不全为0，则必有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m \neq 0$。

- 注意： 对线性无关这个概念的理解，要多多思考。或许有同学这样认为：α_1，α_2，…，α_m 线性无关是指当系数k_1，k_2，…，k_m全为0时，有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$。实际上，这种看法是错误的。大家想一想，当系数$k_1$，$k_2$，…，$k_m$全为0时，$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ 当然是零向量, 这与α_1，α_2，…，α_m线性相关或线性无关没有任何联系。

- 从上述关于线性无关的几种等价说法可以看出：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性无关是指，只有当$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$时才有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$。或者换句话说，在$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$这个条件 下，一定可以推出$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$。实际上，以后我们证明一个向量组线性无关时，一般均采用此观点，即先假设$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$，然后在此假设条件下去证明$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$.

- 例　设$e_1=(1,0,0)^T$, $e_2=(0,1,0)^T$, $e_3=(0,0,1)^T$, 证明：e_1, e_2, e_3线性无关。
- 证明：如果存在数k_1，k_2，k_3使得$k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=0$，即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

通过左边的数乘和加法，上述等式即是

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

所以 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。

因此，e_1, e_2, e_3 线性无关。

- **定理1** 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$（$m \quad 2$）线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示。

证明：先证必要性。

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，所以存在不全为0的m个常数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$。不妨设 $k_1 \neq 0$, 则

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m$$

此即说明 α_1 可以由 α_2， α_3， …， α_m 线性表示．

再证充分性。

不妨设 α_1 可以由 α_2， α_3， …， α_m 线性表示，即存在 **m－1** 个常数（我们不妨设为） k_2， k_3， …， k_m 使得

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \ldots + k_m\alpha_m$$

即 $(-1)\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$。

且 -1，k_2，k_3，…，k_m这m个数不全为0（至少-1不为0），故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$线性相关。证毕。

- 定理1 指出了向量组的线性相关性与其中某一个向量可用其它向量线性表示之间的联系。但它并没有断言究竟是哪一个向量可由其它向量线性表示。下面的定理2即回答了这样一个问题（当然是在更强的条件下）。

- 定理**2** 设

（**1**） 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \beta$ 线性相关；

（**2**） 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，

则向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ 线性表示，且表示式唯一。

证　由α_1，α_2，α_3，…，α_m，β线性相关知存在$m+1$个不全为0的常数k_1，k_2，k_3，…，k_m，k_{m+1}使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\dots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta=0,$$

要证明β可由α_1，α_2，…，α_m线性表示，只须证明$k_{m+1}\neq 0$即可。因为若$k_{m+1}\neq 0$，则

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{m+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{m+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k_{m+1}}\alpha_m$$

下面用反证法证明 $k_{m+1}\neq 0$.

假设$k_{m+1}=0$，则有不全为0的m个数k_1，k_2，…，k_m使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_m\alpha_m=0$，这与$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_m$线性无关矛盾！

下面再证明表示式唯一。设有两个表示式：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

及

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m$$

则两式相减就有

$$0 = (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + (k_3 - l_3)\alpha_3 + \dots + (k_m - l_m)\alpha_m,$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 知

$$(k_1 - l_1) = (k_2 - l_2) = \dots = (k_m - l_m) = 0,$$

即 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_m = l_m$

故表示式唯一。

定理3 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ 也线性相关。

证: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则有不全为0的m个数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0,$$

从而 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m + 0\cdot\alpha_{m+1} + \ldots + 0\cdot\alpha_n = 0.$

因为 $k_1, k_2, \ldots, k_m, 0, \ldots, 0$ 这n个数不全为0（因为 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 不全为0），故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ 线性相关。

定理3 即是说，如果已知一个向量组线性相关，则在此基础上增加一些同维数的向量，得到的新的向量组一定线性相关。

推论1 若某向量组含有零向量，则此向量组一定线性相关。

定理4 设两个向量组T_1：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ 和T_2：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$，其中

$$\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T,$$

$$\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, a_{m+1,j})^T,$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

若向量组T_1：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$线性无关，则向量组$T_2$：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$线性无关。

- 证　反证法。（假设T_2线性相关，证明T_1线性相关。）若T_2线性相关，则有不全为0的数k_1，k_2，…，k_n使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \ldots + k_n\beta_n = 0$,

即

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m+1,1} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m+1,2} \end{pmatrix} + \cdots + k_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m+1,n} \end{pmatrix} = 0$$

- 写成分量的形式就是

$$
\begin{cases}
a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0 \\
a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0 \\
\cdots \\
a_{m+1,1}k_1 + a_{m+1,2}k_2 + \cdots + a_{m+1,n}k_n = 0
\end{cases}
$$

取其前面**m**个方程，即

$$
\begin{cases}
a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0 \\
a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0 \\
\cdots \\
a_{m,1}k_1 + a_{m,2}k_2 + \cdots + a_{m,n}k_n = 0
\end{cases}
$$

❖ 写成向量的形式就是

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots k_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = 0$$

这即是说对于上述不全为**0**的数k_1，k_2，…，k_n有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n = 0,$$

即α_1，α_2，α_3，…，α_n线性相关。

定理**4**是说，如果已知某向量组（向量个数为**n**）线性无关，则此向量组中的每个向量增加一个分量而得到的多一维的向量组（向量个数还是**n**）一定仍然线性无关。增加一维分量如此，增加任意**k**维分量显然也是如此。