第三节 向量组的最大无关组和秩

行向量组 α_i =（$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$），

$i = 1, 2, \ldots, m$ 可以构成矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称矩阵A是由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 所构成的矩阵，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 称为矩阵A的行向量组。

❖ 列向量组

$$\beta_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \cdots n.$$

也可以构成矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

向量组 β_1，β_2，…，β_n称为矩阵**A**的列向量组。

一个m×n矩阵A有m个n维行向量，同时也有n个m维列向量。

由向量组线性相关的定义可知，矩阵A的列向量组β_1，β_2，…，β_n线性相关的充分必要条件是齐次方程组

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n = 0$$

有非零解，也就是齐次方程组

$$[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{0} \text{即} Ax = \vec{0} \text{有非0解}.$$

而一个列向量**b**可以用列向量组β_1，β_2，…，β_n表示的充分必要条件是线性方程组

$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\ldots+x_n\beta_n=\mathbf{b}$ 即$Ax=\mathbf{b}$

有解（不一定是唯一解）。

完全类似，矩阵**A**的行向量组α_1, α_2, …, α_m线性相关的充分必要条件是齐次方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_m\alpha_m=0$

有非零解。

- 也就是方程组

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} = \vec{0} \text{即} x'A = \vec{0} \text{或} A'x = \vec{0} \text{有非0解}.$$

而一个行向量**a**可以用行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 表示的充分必要条件是线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = a$$

即 $x'A = a$（或者 $A'x = a'$）

有解（不一定是唯一解）。

定义1 设有两个**n**维向量组

A： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$;

B： $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$.

如果向量组**A**中的每个向量都能由向量组**B**中的向量线性表示，则称向量组**A**能由向量组**B**线性表示。如果向量组**A**能用向量组**B**线性表示，并且向量组**B**也能用向量组**A**线性表示，则称向量组**A**和向量组**B**等价（**equivalent**）。

下面我们将讨论怎样用矩阵记号表示“向量组**A**用向量组**B**线性表示”这件事。设向量组**A**能由向量组**B**线性表示，则存在**r** 组数$k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{is}$ (i=1,2,…,r)使

$$\alpha_i = k_{i1}\beta_1 + k_{i2}\beta_2 + \cdots\cdots + k_{is}\beta_s。$$

（i=1, 2, …, r）.

当向量组**A, B**是行向量组时，令矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{bmatrix}$$

❖ 则上述α_i用β_1, β_2, …, β_s线性表示的r个式子合在一起表示为矩阵等式即是说，存在r×s矩阵$K=(k_{ij})_{r\times s}$, 使得

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s}\\ & \cdots & \cdots & \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rs}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{bmatrix}=KB.$$

❖ 当向量组A, B是列向量组时，令矩阵 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]$, $B=[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s]$, 则存在s×r矩阵$K'=(k_{ji})_{s\times r}$, 使得 $A=BK'$。其中K'的第i列元素就是向量α_i用β_1, β_2, …, β_s线性表示的系数。

显然，向量组之间的等价关系具有如下性质：

1)反身性：向量组**A**与向量组**A**等价。

2)对称性：若向量组**A**与向量组**B**等价，则向量组**B**与向量组**A**等价。

3)传递性：若向量组**A**与向量组**B**等价，且向量组**B**与向量组**C**等价，则向量组**A**与向量组**C**等价。

数学中，常常把具有上述三条性质的关系称为等价关系。

定理1 若向量组**A**：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$可用向量组**B**：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表示，且向量组**A**线性无关，则向量组**A**的向量个数不超过向量组**B**的向量个数，即 $r \le s.$

证 用反证法证明定理结论。假设$r > s.$我们的目标是得出向量组**A**：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性相关，从而得到矛盾！

设有**r**个常数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = 0。$$

而由$\alpha_i = k_{i1}\beta_1 + k_{i2}\beta_2 + \ldots\ldots + k_{is}\beta_s$,

（**i=1, 2, …, r** ），

我们有 $0=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\sum_{j=1}^{s}\mathrm{k}_{\mathrm{ij}}\beta_j=\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathrm{k}_{\mathrm{ij}})\beta_j.$

上式最后一个等式是由求和符号Σ的性质得到的。当 β_j 的系数全为**0**时，上式显然成立，即当

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathrm{k}_{\mathrm{ij}}=0,\qquad \mathrm{j}=1,2,\ldots,\ s,$$

时，上式成立。

而这是关于**r**个未知数 λ_1，λ_2,…，λ_r的齐次线性方程组，由于它的方程个数**s**<未知数个数**r**，因此一定有非零解 λ_1，λ_2,…，λ_r。

这与向量组**A:** α_1，α_2, …，α_r线性无关矛盾！

由定理**1**易得如下推论。

推论1 若向量组**A**可用向量组**B**线性表示，且**A**所含的向量个数大于**B**所含的向量个数，则向量组**A**一定线性相关。

推论2 等价的线性无关的向量组所含向量个数一定相等。

推论3 任意**n+1**个**n** 维向量一定线性相关，从而任意**m**个**n**维向量（**m > n**）一定线性相关。

证明推论3 设**A:** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$为任意**n+1**个**n**维向量，而**B**为**n**个单位坐标向量$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, ……, $e_n = (0,0,\ldots,1)$, 则显然任意**n**维向量$\alpha = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$都可以用向量组**B**线性表示：$\alpha = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$，因此向量组**A**可以用向量组**B**线性表示。于是由推论**1**知道向量组**A**线性相关。

定义2 设T是一个n维向量组，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是T中r个向量，如果满足

（1）$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关；

（2）T中任意向量α都可以用向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性表示，

则称$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$为向量组T的一个最大线性无关组。

例如，向量组$\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (2, 3, 0)$, $\alpha_3 = (3, 3, 1)$线性相关，但其中任意两个向量均无关，因此α_1, α_2；α_3, α_2；α_1, α_3都是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的最大无关组 。

显然，一个向量组的最大无关组不一定唯一。并且，由第二节定理 2，我们可以把定义 2 的（2）换成

（$\mathbf{2}_{\mathbf{bis}}$）：**T**中任意 r **+1**个向量线性相关 。

例1 全体n维实向量构成的集合记为R^n，求R^n的一个最大无关组。

解　因为n个单位坐标向量$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$，$e_2 = (0,1,0,\ldots，0)$，……，$e_n = (0,0,\ldots,1)$是线性无关的，而IR^n中任意向量都可用$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$，$e_2 = (0,1,0,\ldots，0)$，……，$e_n = (0,0,\ldots,1)$线性表示，因此$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$，$e_2 = (0,1,0,\ldots，0)$，……，$e_n = (0,0,\ldots,1)$就是IR^n的一个最大无关组。

注: 1. 以后称R^n为n维欧几里得空间，且称它的一个最大无关组为R^n的一组基。

2. 设α_1, α_2, …, α_r为r个n维实向量，记V为这r个向量的所有的线性组合构成的集合，即

$$V=\{\alpha:\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,\ k_1,k_2,\cdots,k_r\in R\},$$

以后我们称V为向量α_1, α_2, …, α_r生成的线性空间，它是R^n的一个子集，以后也称为R^n的一个子空间。V的一个最大无关组也称为V的一组基。

3. 设**W**是一些**n**维实向量构成的集合，如果**W**同时满足（**I**）**W**中任意两个向量之和还在**W**中；（**II**）任意实数与**W**中任意向量的乘积仍然在**W**中，则我们称**W**为一个向量空间。**W**的一个最大无关组称为**W**的一组基。

由最大无关组的定义易证：

性质1 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关的充分必要条件为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的最大无关组是它自己。

性质2 向量组T和它的最大无关组等价。从而向量组T的不同的最大无关组之间是等价的。

由性质2知道，一个向量组的最大无关组尽管可能不唯一，但是这些最大无关组之间是等价的，从而由上述定理1的推论2知道这些最大无关组所含向量的个数是一样的。

定义3 向量组T的一个最大无关组的向量个数称为向量组T的秩。

由前面的结果我们有：

命题**1**　向量组**T**：α_1，α_2，…，α_n线性无关的充分必要条件为向量组**T**：α_1，α_2，…，α_n的秩等于向量组**T**所含向量的个数**n .**

命题**2**　若向量组**A**能用向量组**B**线性表示，则**A**的秩≤向量组**B**的秩。

命题**3**　等价的向量组有相同的秩。