第四节　R^n 的基和向量关于基的坐标

定义1 设IR^n中的向量组A：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性无关，$\beta$是$IR^n$中任一向量，则$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性相关（因为这是n＋1个n维向量，向量个数大于向量维数），于是根据第三章第二节定理2知道向量β可以用$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$唯一线性表示

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n。$$

我们称向量组A：$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$为空间$IR^n$的一组基(basis)，把数$k_1, k_2, \dots, k_n$称为向量$\beta$在基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$下的坐标(coordinate)，记为

$$\beta_A = (k_1, k_2, \dots, k_n)。$$

例1 验证$\alpha_1=(1, 0, 0)'$，$\alpha_2=(1, 1, 0)'$，$\alpha_3=(1, 1, 1)'$为IR^3的一组基并求向量$\alpha=(5, 3, 5)'$在这组基下的坐标。

解　显然，向量组α_1，α_2，α_3组成的矩阵的行列式为

1	1	1	$=1\neq 0$
0	1	1	
0	0	1	

因此这三个向量线性无关，所以它们构成 **IR**^{3}的一组基。要求向量α在这组基下的坐标，实际上就是求解关于x_1，x_2，x_3的方程组$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$。即

$$\begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{也即}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=5\\0+x_2+x_3=3\\0+0+x_3=5\end{cases}$$

容易求得$x_1=2$，$x_2=-2$，$x_3=5$，
因此向量α在这组基下的坐标为
（2，－2，5）

当然，对于同一向量β，若选定的基不同，则向量β的坐标一般而言也是不同的。

例如

$e_1=(1, 0, 0)'$, $e_2=(0, 1, 0)'$, $e_3=(0, 0, 1)'$ 是**IR^3**的一组基

（我们通常称之为**IR^3**的自然基）

定义**2** 设向量组**A**：**$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$**和向量组**B**：**$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$**分别为**$IR^n$**的两组基，则向量组**B**：**$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$**可由向量组**A**：**$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$**线性表示，即存在**$n^2$**个常数**$c_{ij}$**（**$i, j=1, 2, \ldots, n$**）使得

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \cdots + c_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

若我们所论及的向量均为列向量，则上式写成矩阵的形式为

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} C = AC$$

我们称矩阵**C**为从基**A**：α **1**，α **2**, **-**…, α **n** 到基**B**：β **1**，β **2**，…，β **n**的过渡矩阵。

定理**1** 过渡矩阵是可逆矩阵

定理**2** 设向量α在两组基**A**：α **1**，α **2**, **-**…, α **n** 和**B**：β **1**，β **2**，…，β **n**下的坐标分别为 $x = [x1, x2, \ldots, x\ n]'$ 和 $y = [y1, y2, \ldots, yn]'$.从基**A**到基**B**的过渡矩阵为**C**，即**B**＝**AC**，则 $Cy = x$ 或 $y = C^{-1}x$ 。

定义1 设a＝(a1，a2，…，an)′ - 和b＝(b1，b2，…，bn)′ 是两个n维向量，规定a与b的内积为：

(a，b)＝a1b1＋a2b2＋…＋anbn，

有时也记为a · b＝a1b1＋a2b2＋…＋anbn。

从矩阵的角度，显然 (a，b)＝ a′b ＝ b′a 。

向量内积具有下列性质：

(a，b)＝(b，a)；

(a ＋ b，c)＝(a，c)＋(b，c)；

(k a，b)＝ k(a，b)，其中 k 是任意实数；

(a，a)≥ 0，等号成立当且仅当a ＝ 0。

定义2 向量**a**的长度或模（**length**，**modulus**）定义为

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}.$$

一般地，称长度等于**1**的向量为单位向量

定理1 （柯西－施瓦兹不等式，**Cauchy-Schwarz**不等式） 向量的内积满足

$$|(\mathbf{a},\mathbf{b})|\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

定义3 规定向量**a**和**b**之间的夹角为

$$<\mathbf{a},\ \mathbf{b}>=\ \arccos\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

如果**a**，**b**的夹角等于π/**2**，则称向量**a**，**b**正交。特别，规定零向量与任何向量正交。

定理2 向量a和b正交（或垂直）的充分必要条件是（a，b）＝ 0。

全体n维实向量构成的集合为n维欧基里得（Euclid）空间，记为IR n

定理3 IRn中的不含零向量的两两正交的向量组(称为非零正交向量组)a1，a2，…，a r是线性无关的。

定义4 设a_1，a_2，…，a_n是n个n维实向量，若

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \begin{cases} 1, & 若\ i = j, \\ 0, & 若\ i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots n$$

则称a_1，a_2，…，a_n是IR ^{n}的一组标准正交基

施密特（Schmidt）正交化

给定向量组a1，a2，…，an线性无关，则我们可以按照下述步骤将其标准正交化

①令$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1$	②令$\mathbf{e}_1=\mathbf{b}_1/\|\mathbf{b}_1\|$
③作$\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-(\mathbf{a}_2,\ \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$	④令$\mathbf{e}_2=\mathbf{b}_2/\|\mathbf{b}_2\|$
⑤令$\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3-(\mathbf{a}_3,\ \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1-(\mathbf{a}_3,\ \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$	⑥令$\mathbf{e}_3=\mathbf{b}_3/\|\mathbf{b}_3\|$
……	……
第2n－1步：令$\mathbf{b}_n=\mathbf{a}_n-(\mathbf{a}_n,\ \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1-(\mathbf{a}_n,\ \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2-\cdots\cdots-(\mathbf{a}_n,\ \mathbf{e}_{n-1})\mathbf{e}_{n-1}$	第2n步：$\mathbf{e}_n=\mathbf{e}_n/\|\mathbf{e}_n\|$

这样我们从线性无关的向量组**a1，a2，…，an**出发，得到标准正交向量组**e1，e2，……，en，(**显然，向量组**e1，e2，……，en**与向量组**a1，a2，…，an**等价**)**。此过程我们称为**Schmidt**正交化过程。

例**3** 已知**B**：**a1，a2，a3-**是**IR 3**的一组基，其中 **a1＝(1, –1, 0)，a2＝(1, 0, 1)，a3＝(1, -–1, 1)**。
试用**Schmidt**正交化方法，由**B**构造**IR 3**的一组标准正交基。

解 取b1＝a1＝(1, –1, 0)，则

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

b2＝a2－(a2，e1)e1

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

b3＝a3－(a3，e1)e1－(a3，e2)e2

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

正交矩阵

定义5　n阶方阵A称为正交矩阵是指A满足ATA＝E。

定理4　A为n阶正交矩阵的充分必要条件是A的列向量为IRn的一组标准正交基

性质　设A，B皆为n阶正交矩阵，则

1）detA＝1或－1。

2）A－1＝AT。

3）AT也是正交矩阵

4）AB也是正交矩阵。

定义1 数域F上的线性空间(Linear space)V是一个非空集合，它带有两个运算：加法（a，b∈V为V中的元素，则a加b记作a＋b）和数乘（λ∈F为一个数，a∈V为V中一个元素，则λ与a的乘积记为λa），且V对这两种运算封闭（即运算结果仍在V中）并满足如下八条运算规则：

1）a＋b＝b＋a；(加法的交换律)

2）(a＋b)＋c＝a＋(b＋c)；(加法的结合律)

3）存在V中元素θ使得a＋θ＝a，其中θ称为V的零元素。

4）对V中任意元素a都存在元素b使得a＋b＝θ，其中b称为a的负元素，记为b＝－a。因此a＋(－a)＝θ。

5）1a＝a；

6）s(ta)＝(st)a；(结合律)

7）(s＋t)a＝sa＋ta；(分配律)

8）s(a＋b)＝sa＋sb。(分配律)

其中a，b，c为V中任意元素，s，t为F中的任意数。

当F为实(复)数域时，称V为实(复)线性空间。

我们还是称线性空间中的元素为向量，且把线性空间称为向量空间

定义2 设V是一个线性空间，W是V的一个非空子集，如果W对V中定义的加法和数乘运算也构成数域F上的线性空间，就称W是V的一个线性子空间（或简称子空间）

定理1 线性空间V的子空间W为V的子空间的充分必要条件是W对于V的两种运算封闭。

定义1 在线性空间V中，如果存在n个元素a1, a2, ……, an满足:a1, a2, ……, a n线性无关；V中任意元素a均可用a1, a2, ……, a n线性表示，那么，a1, a2, ……, a n就称为线性空间V的一组基，基的向量个数n称为V的维数

维数为n的线性空间称为n维线性空间，记作dimV＝n。若对于任意的自然数m，V中都有m个线性无关的元素，则称V是无穷维线性空间。

若a1, a2, ……, an为V的一组基，则V可以表示为

V＝｛a＝x1a1＋x2a2＋……＋$x$na n：

x1, x2, ……, xn∈IR ｝，

这就较清楚地显示出线性空间V的构造

定义2 设a1, a2, ……, an为V的一组基。对于任意元素a∈V，总有且仅仅有一组有序数组x1, x2, ……, xn，使得 a＝x1a1＋x2a2＋……＋$x$na n，

有序数组x1, x2, ……, xn称为a在基a1, a2, ……, an的坐标，并记作a＝(x1, x2, ……, xn)。

基变换和坐标变换

设a1, a2, ……, an为V的一组基，b1, b2, ……, bn为V的另一组基，则由基的定义，这两个向量组可以相互线性表示，因此存在n2个数pij，i, j＝1,2，-……，n，使得

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = p_{11}\mathbf{a}_1 + p_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{n1}\mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_2 = p_{12}\mathbf{a}_1 + p_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{n2}\mathbf{a}_n \\ \quad\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{b}_n = p_{1n}\mathbf{a}_1 + p_{2n}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{nn}\mathbf{a}_n \end{cases}$$

用矩阵的形式可以把上式表示为

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) P$$

我们称此式为基变换公式，其中矩阵**P**称为由基**a1, a2, ……, an**到基**b1, b2, ……, bn**的过渡矩阵。因为**b1, b2, ……, bn**线性无关，故矩阵**P**是一个可逆矩阵。