第五节　矩阵的秩和向量组的秩

定理1 （1）若矩阵A经过有限次初等行变换变成B，则A的行向量组与B的行向量组等价；而A的任意k个列向量与B中对应的k个列向量有相同的线性相关性。

（2）若矩阵A经过有限次初等列变换变成B，则A的列向量组与B的列向量组等价；而A的任意k个行向量与B中对应的k个行向量有相同的线性相关性。

证明:

（**1**）当矩阵**A**经某个初等变换变为**B**时，**B**的行向量组能由**A**的行向量组线性表示；而**B**经过这个初等行变换的逆变换（仍为初等行变换）可变为**A**，因而**A**的行向量组也能由**B**的行向量组线性表示。于是矩阵**A**，**B**的行向量组等价。

由于矩阵**A**，**B**的行向量组等价，因此方程组**A*x* = 0**与**B*x*= 0**同解。所以**A**的任意**k**个列向量与**B**的相应的**k**个列向量有相同的线性相关性。（为什么？请思考！）

定义1 矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的行秩；A的列向量组的秩称为A的列秩。

定理2 设A为一个矩阵，则A的行秩＝A的列秩＝矩阵A的秩。

证:

对A进行初等行变换将其化为行阶梯形U，则由定理1（1）知道A的行向量组与U的行向量组等价，故

A的行秩＝U的行秩；

同时，由定理1（1）的后半部分结论知道

A的列秩＝U的列秩。

而对于行阶梯形矩阵U来说，显然

U的行秩＝U的列秩＝矩阵U的秩，

因此定理2的结论成立。

定理3 设A为n阶方阵，则$R(A)=n$的充分必要条件为 $|A|\neq 0$。

证“充分性$\Leftarrow$”： 设$|A|\neq 0$，则由Cramer法则知道$Ax=0$只有零解。故A的列向量组线性无关，因此由定理2知道$R(A)=n$。

“必要性$\Rightarrow$”：设$R(A)=n$，则A的标准型为n阶单位矩阵E_n，即存在可逆矩阵P，Q使得$PAQ=E_n$。等式两边取行列式则有$|A|\neq 0$。

例1 设 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\alpha_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_4 = (0, 0, 1, 1)$,

求 α_1, α_2, α_3, α_4 的秩和它的一个最大无关组。

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_4]{r_2 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 - r_1]{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_{41}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 故由定理 2 的证明和定理 1， R(A)= 3 . 且在矩阵A中，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- 因此由定理 3， 向量（**2, 3, 4**）**(1, 1, 0) (0, 0, 1)**线性无关 **,**故由第二节定理 4， 知道 α_2， α_3， α_4线性无关，所以， α_2， α_3， α_4是所论向量组的一个最大无关组．实际上，我们可以证明，对于此例而言， α_1， α_2， α_3， α_4中任意三个向量均是最大无关组．

*定理 4 （1）设A，B分别为m×n和s×n矩阵，则

$$\max(R(A),\ R(B)) \le R\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \le R(A)+R(B).$$

（2）设A，B分别为r阶和s阶方阵，C为r×s阶矩阵，则

$$R\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \ge R(A)+R(B),\quad (\text{类似},\ R\begin{bmatrix} C^T & B \\ A & O \end{bmatrix} \ge R(A)+R(B).\ )$$

且当A(或B)为可逆方阵时，或C＝O时，上述不等式为等式。

（3）设A，B分别为m×r矩阵和r×n矩阵，则

$$R(AB) \le \min\{R(A),\ R(B)\}.$$

例2 设A，B均为m×n矩阵，

证明 R(A+B)≤ R(A)＋R(B)。

证明 因为A+B可以表示为

$$A+B=\begin{bmatrix} E_m & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix},$$

$$\therefore \quad R(A+B)=R\left[E_{m+m}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right] \overset{\text{定理4（3)}}{\leq} R\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \overset{\text{定理4(1)}}{\leq} R(A)+R(B) \quad 。$$

定理5（矩阵的秩的第一降阶定理） 设A为s×s可逆矩阵，且设 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 为$m\times n$矩阵，

则 $R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=R(A)+R(D-CA^{-1}B).$

证明 根据分块矩阵的乘法规则，我们有

$$\begin{bmatrix} E_s & O \\ -CA^{-1} & E_{n-s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

且 $\begin{bmatrix} E_s & O \\ CA^{-1} & E_{n-s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$

所以由定理4（3）有

$$R\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \le R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ 且 } R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \le R\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

$$\therefore R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \overset{\text{定理4(2)}}{=} R(A)+R(D-CA^{-1}B). \quad \text{证毕}$$

推论(矩阵的秩的第二降阶定理)

设$A_{r\times r}$, $B_{r\times(n-r)}$, $C_{(m-r)\times r}$, $D_{(m-r)\times(n-r)}$为四个矩阵，且A可逆，则

$$R(D-CA^{-1}B) = R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - R(A).$$

***定理6 (Sylvester)** 设A，B分别为m×n及n×s矩阵，则

$$R(AB) \geqslant R(A)+R(B)-n.$$

证 $R(AB)=R(O-(-A)E_nB)$

$$= R(O-(-A)E_n^{-1}B) \overset{\text{推论}}{=} R\begin{bmatrix} E_n & B \\ -A & O \end{bmatrix} - R(E_n) = R\begin{bmatrix} E_n & B \\ -A & O \end{bmatrix} - n$$

$$\geqslant R(-A)+R(B)-n = R(A)+R(B)-n.$$

例3 设A，B分别为$m\times n$和$n\times s$矩阵，且$AB=0$，则 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

证 因为$AB=O$，所以由Sylvester不等式知道$0=R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n$.

例4 设A为n阶方阵，满足$A^2=A$，证明 $R(A)+R(E_n-A)=n$.

证 由$A^2=A$知道 $A(A-E_n)=O$，因此由例3得 $R(A)+R(E_n-A)\leqslant n$。

另一方面，由例2有$n=R(E_n)=R(A+E_n-A)\leqslant R(A)+R(E_n-A)$，所以

$$R(A)+R(E_n-A)=n .$$