第六节 综合例题

例1　证明：向量组α_1（$\neq 0$），α_2，…，α_m线性相关的充分必要条件是其中至少有一个α_s，$1<s\leq m$，可用α_1，α_2，-…，α_{s-1}线性表示.

证："必要性⇒"　设α_1，α_2，…，α_m线性相关，则存在不全为0的m个数k_1，k_2，…，k_m使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_m\alpha_m=0,$$

我们记m个数k_1，k_2，…，k_m中非零的数中下标最大的那个数为k_s，（即$k_s\neq 0$，而且当$s\neq m$时有$k_{s+1}=k_{s+2}=\dots k_m=0$），则$1<s\leq m$，因为若$s=1$，则$k_1\alpha_1=0$，从而$\alpha_1=0$，与题设矛盾！于是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_s\alpha_s=0$，因此

$$\alpha_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}.$$

"充分性$\Leftarrow$" 设

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0$,

则 α_1, α_2, …, α_s线性相关，于是由第二节定理 3 知道

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关.

例2 设$t_1, t_2, \ldots, t_r$是 r 个互不相同的数，$r \leqslant n$，证明向量组

$$\alpha_s = (1, t_s, t_s^2, \ldots, t_s^{n-1})^T \quad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

线性无关.

证 作矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$，则

(1) 当 $r = n$ 时，$\det(A)$为Vandermonde行列式，于是

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ & \cdots & \cdots & \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (t_i - t_j),$$

因为 $i \neq j$ 时，$t_i \neq t_j$，因此 $|A| \neq 0$，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关.

(2) 当 $r < n$ 时，由矩阵A的定义有R(A)＝r，因此A的r个列向量线性无关。所以

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关。

对矩阵进行初等变换不改变矩阵的秩这个事实在讨论向量组的秩时也很有用。

例3 已知四个向量α_1，α_2，α_3，α_4，证明向量组$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$线性相关。

证 不妨设所讨论的向量为列向量，作矩阵

$\mathbf{A}=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_4,\ \alpha_4-\alpha_1)$，

则

$$A \xrightarrow[c_3+c_4]{c_1-c_2} (\alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1,\ \alpha_4-\alpha_1) \xrightarrow{c_1-c_3} (\vec{0},\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1,\ \alpha_4-\alpha_1)$$

因此**R(A)≤3**，所以**A**的四个列向量线性相关。

例**4** 设α_1=**(2, 0, −1, 3),** α_2=**(3, −2, 1, −1)** 和 β_1=**(−5, 6, −5, 9),** β_2=**(4, −4, 3, −5),** 证明向量组α_1，α_2与向量组β_1，β_2等价。

证**I**

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1&3\\3&-2&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_1]{r_1\div 2}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&-2&\frac{5}{2}&-\frac{11}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\div(-2)}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{5}{4}&\frac{11}{4}\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&6&-5&9\\4&-4&3&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}-1&2&-2&4\\4&-4&3&-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-4r_1]{r_1\times(-1)}\begin{bmatrix}1&-2&2&-4\\0&4&-5&11\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\div 4]{r_1+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{5}{4}&\frac{11}{4}\end{bmatrix},$$

因此矩阵**A**和**B**有相同的行最简形，所以向量组 α_1，α_2与向量组β_1，β_2等价。

证II

$$C=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1&3\\3&-2&1&-1\\-5&6&-5&9\\4&-4&3&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[2r_2-3r_1]{\substack{r_4-2r_1\\r_3+r_1+r_2}}\begin{bmatrix}2&0&-1&3\\0&-4&5&-11\\0&4&-5&11\\0&-4&5&-11\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-1&3\\0&4&-5&11\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因此**R(C)＝2**，而显然α_1，α_2与向量组β_1，β_2均线性无关，故α_1，α_2与向量组β_1，β_2都是**C**的行向量组的最大无关组，所以向量组α_1，α_2与向量组β_1，β_2等价。

对分块矩阵**M**规定初等变换如下：

(1). 互换**M**的两分块行（列），

(2). 用满秩矩阵**K**左（右）乘**M**的某一分块行（列），

(3). 用非零矩阵**K**左（右）乘**M**的某一分块行（列）加到另外一分块行（列）上。

可以证明，对分块矩阵作初等变换不改变矩阵的秩。

矩阵的初等变换是一个非常有用的工具。对于分块矩阵的初等变换若应用得当，则会为解决问题带来相当大的方便。

例5 设矩阵$A_{m\times k}$, $B_{m\times l}$的秩分别为r, s, 而矩阵C ＝[A, B]的秩为t. 证明：

$$\max(r, s) \leqslant t \leqslant r+s\ .$$

证 因为**A, B**为矩阵**C**的一部分，故**t**$\geqslant$**max (r, s)**, 下面证明**t**$\leqslant$ **r＋s** .因为

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix}$$

且初等变换不改变矩阵的秩，故

$$t = R[A,\ B] \leq R\begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \overset{\text{第4节定理4}}{=} R(A)+R(B).$$

例6　证明：R(AB)≤min（R(A), R(B)）.

证　R(AB)≤R(AB, A)＝R(O, A)＝R(A),

$$R(AB) \le R\begin{bmatrix} AB \\ B \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} O \\ B \end{bmatrix} = R(B),$$

所以，R(AB)≤min（R(A), R(B)）。

例7 设A，B分别为s×n, n×r矩阵，证明

$$R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$$

证 因为

$$\mathrm{R}(\mathrm{A}) + \mathrm{R}(\mathrm{B}) = \mathrm{R}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & O \\ O & \mathrm{B} \end{bmatrix} \leq \mathrm{R}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & O \\ \mathrm{E}_n & \mathrm{B} \end{bmatrix}$$

$$= R\begin{bmatrix} O & -AB \\ E_n & B \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} O & -AB \\ E_n & O \end{bmatrix} = R(AB) + n.$$

所以

$$R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$$

例8 设A为m×n矩阵，B为n×m矩阵，n<m, 证明：(AB)X=0有非零解。

证明 显然AB为m×m方阵，另外一方面，

$$R(AB) \leq \min\left\{R(A), R(B)\right\} \leq n < m$$

因此AB的m个列向量线性相关，即

(AB)X=0有非零解。

- 清华版 **p140: 3, 9， 10, 11, 13(3)**

和下一次作业一起交。