第四章 线性方程组

本章主要研究以下三个问题：

- （**1**）线性方程组有解的充分必要条件是什么？
- （**2**）如果线性方程组有解，其有多少解？如何求得其解？
- （**3**）如果线性方程组有多个解，如何将其解用通解表示出来？

第一节 克莱姆法则

在前面的几节中，我们已经讨论了行列式的基本理论及其运算法则，在此节中，我们将行列式的理论及运算应用于解决**n**个变量、**n**个方程的线性方程组的求解问题。

设有**n**个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的**n**个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

若有某 $b_i \neq 0(i = 1,2,\cdots.n)$ **,**则称此线性方程组为**n**元非齐次线性方程组。

由它的系数a_{ij}组成的**n**阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为线性方程组（1）的系数行列式。

定理（克莱姆法则）如果线性方程组（1）的系数行列式D≠0，则方程组（**1**）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D} \qquad （2）$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots.n)$ 是将**D**的第**j**列元素$a_{1j},a_{2j},\cdots a_{nj}$分别换成常数项$b_{1,}b_2,\cdots b_n$后所得到的n阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证：

设方程组（**1**）有解，即有一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足方程组（**1**）。用 x_1 乘系数行列式，并利用行列式性质**3**可得

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1 + x_2 c_2}} \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1 + x_3 c_3}} \cdots \cdots$$

$$\underline{\underline{c_1 + x_n c_n}} \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1$$

所以，对 x_1有：

$$Dx_1 = D_1$$

一般地，对 x_j 有：

$$Dx_j = D_j (j = 1,2,\cdots,n)$$

当D≠0时，有：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

这说明，线性方程组（**1**）当**D≠0**时，如果有解，这解就只能是（**2**）。下面我们验证（**2**）是方程组（**1**）的解，即证明下式成立

$$a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i (i = 1,2,\cdots,n)$$

观察以下两行相同的**n+1**阶行列式：

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_i & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中**i=1,2,…,n**。它的值为零,将它按第一行展开,由于第一行中 a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{i+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{j+2}(-1)^{j-1}D_j = -D_j$$

所以有

$$0 = b_i D - a_{i1}D_1 - \cdots - a_{in}D_n$$

即

$$a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i (i = 1,2,\cdots,n)$$

此说明**(2)**确实是方程组**(1)**的解。

当方程组**(1)**右端的常数均是零时,**(1)**变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(3)式称为n元齐次线性方程组,并有如下结论成立:

推论 当系数行列式$D\neq 0$时,齐次线性方程组(3)只有唯一零解。

由推论自然可推出,如果齐次线性方程组(3)有非零解,则它的系数行列式必为零。由此可知,系数行列式D=0是齐次线性方程组(3)有非零解的必要条件。在第四章我们将证明此条件是充分的。于是应有:齐次线性方程组(3)有非零解的充分必要条件是系数行列式D=0。

例1 解奇次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解： 由于其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

所以，根据推论得该齐次方程组只有零解：$x_1 = x_2 = x_3 = 0$。

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解： 方程的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=27$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81 \qquad D_2=\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27 \qquad D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27$$

$$x_1 = 81/27 = 3, x_2 = -108/27 = -4, x_3 = -27/27 = -1, x_4 = 27/27 = 1$$

例3 在一次投料生产中，能获的甲、乙、丙三种产品，每次测得的总成本如下表：

批次	产品（公斤）			总成本（元）
	甲	乙	丙	
第一批生产	**2**	**1**	**1**	**28**
第二批生产	**5**	**2**	**2**	**66**
第三批生产	**10**	**5**	**4**	**137**

求每种产品的单位成本。

解：

我们设甲、乙、丙三种产品的单位成本分别为：x_1, x_2, x_3元，则根据测试的资料，可得到以下方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 66 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 137 \end{cases}$$

分别求以下行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 28 & 1 & 1 \\ 66 & 2 & 2 \\ 137 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 1 \\ 5 & 66 & 2 \\ 10 & 137 & 4 \end{vmatrix} = 5 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 28 \\ 5 & 2 & 66 \\ 10 & 5 & 137 \end{vmatrix} = 3$$

则 $x_1 = 10/1 = 10, x_2 = 5/1 = 5, x_3 = 3/1 = 3$
所以甲、乙、丙三种产品的单位成本分别为：
10元**/**公斤、**5**元**/**公斤、**3**元**/**公斤。

值得注意的是：克莱姆法则仅可解决当线性方程组的方程个数与未知数个数相同时，并且方程组的系数行列式不等于零时的求解问题，如果当方程组的方程个数与未知数个数不相同时，或者方程组的系数行列式等于零时，用克莱姆法则一般不可能求解这样的方程组的解，这时，我们可借助下面将讨论的矩阵理论来求解更一般的方程组。