第二节　齐次线性方程组

System of homogenous linear equations

一、齐次线性方程组有非零解的条件

- 讨论齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

❖ 若记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则 齐次线性方程组可表示为

$$\mathbf{A}x=\mathbf{0} \qquad (2)$$

其中矩阵**A**称为齐次线性方程组的系数矩阵。

- 假设其系数矩阵的秩**R（A）= r ＞0**，为了方便起见，不妨设

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ & \vdots & \vdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

- 由于上面假设**D≠0**，即系数矩阵**A**的前**r**列列向量线性无关，因此经过有限次初等行变换可得矩阵**A**的行最简形为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & -c_{1,r+1} & \dots & -c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -c_{r,r+1} & \dots & -c_{r,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

由于A和B的行向量组等价，于是（1）与如下的方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases} \qquad (3)$$

其中x_{r+1}，…，x_n可取任意实数，称为自由未知量。

由上面的讨论，我们可容易得到如下定理：

定理1 齐次线性方程组（1），当它的系数矩阵的秩r=n时，只有零解；当它的系数矩阵的秩r＜n时，有无穷多个解。

我们还不难得到以下结论：齐次线性方程组总有解；齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是R（A）＜n；当齐次线性方程组中m＜n，齐次线性方程组有非零解。

并可得到下面的推论

推论 n个变量n个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式等于零。

- 到现在为止，对于齐次线性方程组，我们已解决了在本章开始时提出的三个问题中的前两个问题。当齐次线性方程组有无穷多个解时，如何描述它的所有的解呢？下面我们对解的情况进行讨论，即讨论第三个问题。

二、齐次线性方程组解的结构

若$x_1=\xi_{11}$，$x_2=\xi_{21}$，…，$x_n=\xi_{n1}$为齐次线性方程组（1）的解，则称

$x=(\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{n1})'$ 为齐次线性方程组（2）的解向量。

定理2 设ξ_1，ξ_2为齐次线性方程组（2）的两个解向量，则其线性组合$k_1\xi_1+k_2\xi_2$也是齐次线性方程组（2）的解向量（k_1，k_2为任意实数）。

证明 这是因为$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1A\xi_1+k_2A\xi_2=0+0$，故得证。

- 由此结论可知，所有齐次线性方程组（2）的解向量的集合形成了一向量空间，此空间称为齐次线性方程组（2）的**解空间**。而由此我们又想到，如果我们找到了此解空间的基，便能将齐次线性方程组（2）的解向量一并表示出来，我们将齐次线性方程组（2）的解空间的基称为**基础解系**。

假定ξ_1，ξ_2，…，ξ_k为齐次线性方程组（2）的k个解向量，如果

（a）ξ_1，ξ_2，…，ξ_k线性无关；

（b）齐次线性方程组（2）的任意解向量是ξ_1，ξ_2，…，ξ_k的线性组合，

则称ξ_1，ξ_2，…，ξ_k为齐次线性方程组（2）的一个基础解系。

- 一个向量空间的基应该不是唯一的，则齐次线性方程组的基础解系也不是唯一的，但其所包含的解向量的个数应该是相同的。下面我们将讨论如何求解齐次线性方程组的基础解系，亦即最终实现用有限个解向量来表示齐次线性方程组的无穷多个解向量。

❖ 令**x=（x$_1$，x$_2$，…，x$_n$）'**是齐次线性方程组（**1**）的任意解，由（**3**）式得：

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{1,r+1}x_{r+1}+c_{1,r+2}x_{r+2}+\ldots+c_{1n}x_n \\ \vdots \\ c_{r,r+1}x_{r+1}+c_{r,r+2}x_{r+2}+\ldots+c_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$
= x_{r+1}\begin{bmatrix} c_{1,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_{r+2}\begin{bmatrix} c_{1,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= x_{r+1}\xi_1 + x_{r+2}\xi_{r+2} + \cdots + x_n\xi_{n-r}
$$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} c_{1,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} c_{1,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots\cdots, \xi_{n-r} = \begin{bmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

以上结论说明，齐次线性方程组（1）的任意解均为ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}的线性组合。

如果我们能说明ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}是齐次线性方程组（1）的解，并且它们线性无关，那么ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}就是齐次线性方程组（1）的基础解系。但由ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}的取法这两个条件是显然满足的。

我们将以上所得到的结论总结成以下定理：

定理3 如果齐次线性方程组（1）的系数矩阵的秩r=n，它有唯一零解，此时它没有基础解系；如果齐次线性方程组（1）的系数矩阵的秩r＜n，它有无穷多个解，此时它有基础解系，其基础解系包含n-r个解向量，齐次线性方程组（1）的任意解为其基础解系的线性组合。

定理3也表明，基础解系的任意线性组合表达了齐次线性方程组（1）的所有解，由此有通解这一概念。

如果ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}为齐次线性方程组（1）的基础解系，则其任意线性组合

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

（k_1，k_2，…，k_{n-r}为任意实数）

称为齐次线性方程组（1）的通解。

求齐次线性方程组的基础解系有以下步骤：

(1) 用初等行变换将齐次线性方程组（**1**）的系数矩阵化为行最简形，以此得到齐次线性方程组（**1**）同解的方程组，即得到**(3)**的形式；

(2) 根据**(3)**的特殊形式写出其基础解系和通解。

❖ 例1　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

❖ 解　　对系数矩阵施行初等行变换成为行最简形：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -\dfrac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 于是得到与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \dfrac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \dfrac{4}{3}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

- 令$x_3=k_1$，$x_4=k_2$，可把它写成通常的参数形式，

$$\begin{cases} x_1 = 2k_1 + \dfrac{5}{3}k_2 \\ x_2 = -2k_1 - \dfrac{4}{3}k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$$

其中k_1，k_2为任意实数，或写成向量形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 + \frac{5}{3}k_2 \\ -2k_1 - \frac{4}{3}k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

❖ 原方程组的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$