第三节 非齐次线性方程组

对非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

则原来的方程组可以表示为

$$\mathbf{A}x=\mathbf{b} \qquad （2）$$

如果令

$$a_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则原来的方程组也可以表示为

$$\mathbf{x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n=b}$$

称方程组

A*x*=0

为原来的非齐次线性方程组所对应的齐次线性方程组。

一、非齐次线性方程组有解的条件

令

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称此矩阵为原来非齐次方程组的增广矩阵。

则下面的四种提法是等价的：

I) 非齐次线性方程组（1）有解；

II) 向量b能由向量组a_1，a_2，…a_n线性表示；

III)向量组a_1，a_2，…a_n与向量组a_1，a_2，…a_n，b等价；

IV) R（A）=R（B）。

即有下列定理成立

定理1　非齐次线性方程组（1）有解的充分必要条件是它的系数矩阵A与增广矩阵B的秩相等。

若非齐次线性方程组（1）的

R（A）=R（B）=r＞0，

不妨假设其前r行及前r列所构成的r阶主子式D≠0，于是可得到非齐次线性方程组（1）的一个同解方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases}$$

用克莱姆法则可解此方程组。

$x_1=D_1/D$，$x_2=D_2/D$，…，$x_r=D_r/D$，

$x_{r+1}=x_{r+1}$，…，$x_n=x_n$

定理2　如果非齐次线性方程组（1）有解，则当它的系数矩阵的秩r=n时，非齐次线性方程组（1）有唯一解；当它的系数矩阵的秩r＜n时，非齐次线性方程组（1）有无穷多个解。

例1 问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解；有唯一解；有无穷多个解？

解 此线性方程组的系数矩阵**A**与增广矩阵**B**分别为：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

由于

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

当λ≠1， λ≠-2时，R（A）=R（B）=3，

这时线性方程组有唯一解；

当λ=1时，R（A）=R（B）=1＜3，这时线性方程组有无穷多个解；

当λ=-2时，R（A）=2≠R（B）=3，此时线性方程组无解。

此题也可将增广矩阵进行初等行变换，讨论系数矩阵与增广矩阵的秩的关系，从而得到其解的情况。

$$B=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\
0 & 0 & 1-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3
\end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\
0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & (\lambda-1)(\lambda+1)^2
\end{bmatrix}
$$

当 $\lambda \neq 1, -2$ 时，R（A）=R（B）=3，则方程组有唯一解。

当 $\lambda = 1$ 时，R（A）=R（B）=1＜3，则方程组有无穷多个解。

当 $\lambda = -2$ 时，R（A）=2≠R（B）=3，则方程组无解。

二、非齐次线性方程组解的结构

性质1　设$x=\eta_1$，$x=\eta_2$都是非齐次线性方程组（2）的解，则$\eta_1-\eta_2$是其对应齐次线性方程组（4）的解。

　证

由 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$

即$\eta_1-\eta_2$满足对应齐次线性方程组

$$Ax=0 \quad 。$$

性质2 设$x=\eta$是非齐次线性方程组（2）的解，$x=\xi$是（2）对应齐次线性方程组$Ax=0$的解，则$x=\xi+\eta$仍是非齐次线性方程组（2）的解。

证 因$A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$

即$x=\xi+\eta$是非齐次线性方程组（2）的解。

定理3　设η^*是非齐次线性方程组（2）的一个解（称为特解），ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}是对应齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，则非齐次线性方程组（2）的通解（一般解）x可表示为

$$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中k_1，k_2，…，k_{n-r}为任意实数。

证　设x为非齐次线性方程组（2）的任意解，则据性质1，$x-\eta^*$其对应齐次线性方程组$Ax=0$的解，故$x-\eta^*$可由ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}线性表示，即

$$x-\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

亦即有　$$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

又$\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_n\xi_{n-r}$为是非齐次线性方程组（2）的解，所以非齐次线性方程组（2）的通解为

$$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中k_1，k_2，…，k_{n-r}为任意实数。

例2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

解 对增广矩阵B作初等行变换：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2 \div 2 \\ r_3 + r_2}]{r_1 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见 R（A）=R（B）=2，则线性方程组有解，其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

即得通解

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

k_1,k_2为任意实数。

例3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \end{cases}$$

解　对其增广矩阵**B**作初等行变换：

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

由于 **R（A）=2**，而**R（B）=3**，则线性方程组无解。