第四节　综合与提高

一、齐次线性方程组

例1 设A为n阶矩阵，证明

$$R（A）=R（A'A）。$$

证明 由于若$Ax=0$，有$A'Ax=0$，这说明凡是$Ax=0$的解必为$A'Ax=0$的解。

另一方面，若$A'Ax=0$，我们记$Ax=y$，则有

$y'y=x'A'Ax=x'（A'Ax）=0$，则$y=0$，亦即$Ax=0$。这说明凡是$A'Ax=0$的解必为$Ax=0$的解。故$A'Ax=0$与$Ax=0$的同解。当两齐次线性方程组同解，意味着它们的基础解系包含的向量个数相等，亦即有：

$$n-R(A)=n-R(A'A)$$

所以 $R(A)=R(A'A)$.

例2 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

的一个基础解系为

$(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1,2n})'$,

$(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2,2n})'$, …,

$(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{n,2n})'$,

试写出线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

的通解，并说明理由。

解　我们记线性方程组（**1**）（**2**）的系数矩阵分别为**A**，**B**，由于

$(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1,2n})'$,$(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2,n})'$，…，$(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{n,2n})'$为（1）的一个基础解系，则 $AB'=0$，亦即有$BA'=(AB')'=O$，此说明A的n个行向量的转置向量为（2）的n个解向量。

另一方面，由于B的秩为n，则以B为系数矩阵的方程组（2）的解空间的维数为2n－n=n。而R(A)为2n与（1）的解空间维数的差，即为n，故有A的n个行向量线性无关，从而A的n个行向量的转置向量构成了（2）的一个基础解系，于是（2）的通解为

$y=c_1(a_{11},a_{12}, \ldots,a_{1,2n})'+c_2(a_{21},a_{22}, \ldots,a_{2,2n})' +\ldots +c_n(a_{n1},a_{n2},\ldots,a_{n,2n})'$

其中c_1， c_2，… c_n为任意实数。

二、非齐次线性方程组

例3 问a，b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多个解？并其唯一解和通解。

解　对其增广矩阵进行初等行变换

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-3r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$$

1）当$a\neq 1$时，R（A）=R（B）=4，这时原方程组有唯一解为

$$x_1=(b-a+2)/(a-1),$$

$$x_2=(a-2b-3)/(a-1)$$

$$x_3=(b+1)/(a-1), \quad x_4=0$$

2）当a=1，R（A）=2。

若$b\neq -1$，R（B）=3≠R（A），这时方程组无解。

若$b=-1$，R(B)=2=R(A)，这时方程组有无穷多个解。

与原方程组同解的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

则方程组的通解为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{其中} k_1, k_2 \in R$$

三、利用线性方程组讨论矩阵的秩

例4 设A，B为n阶矩阵，证明：若AB=0，则 $R(A)+R(B)\leqslant n$。

证 设R(A)=r，R(B)=s，由AB=0知，B的每一列向量都是 $Ax=0$ 的解向量。

当r=n时，$Ax=0$ 只有零解，故B=0，

而R(A)=n，R(B)=0，结论成立。

当r＜n时，Ax=0的基础解系含有n-r个解，从而B的列向量组的秩≤n－r，

即 $R(B)\leqslant n-r$，故 $R(A)+R(B)\leqslant n$。

例**5** 设 η^*是非齐次线性方程组**Ax=*b***的一个解，ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}是其对应齐次线性方程组**Ax=0**的一个基础解系，证明

$$\eta^*,\quad \eta_1=\eta^*+\xi_1,\quad \ldots,\quad \eta_{n-r}=\eta^*+\xi_{n-r}$$

是非齐次线性方程组的**n-r+1**个线性无关的解向量，并且非齐次线性方程组的任意解向量η可表为

$$\eta=c_0\eta^*+c_1\eta_1+\ldots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$

此处的$c_0+c_1+\ldots+c_{n-r}=1$。

证　显然η^*，$\eta_1=\eta^*+\xi_1$，…，$\eta_{n-r}=\eta^*+\xi_{n-r}$是非齐次线性方程组的$n-r+1$个解向量，下面我们证其线性无关。假定

$$k_0\eta^*+k_1\eta_1+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0$$

那么有

$$(k_0+k_1+\ldots+k_{n-r})\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$$

若$k_0+k_1+\ldots+k_{n-r}\neq 0$，则$\eta^*$是$\xi_1$，$\xi_2$，…，$\xi_{n-r}$的线性组合，因此，$\eta^*$不是非齐次线性方程组的解向量，这与假设矛盾，故$k_0+k_1+\ldots+k_{n-r}=0$，又因为$\xi_1$，$\xi_2$，…，$\xi_{n-r}$是其对应齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，所以，$k_1=\ldots=k_{n-r}=0$，由此，$k_0=0$，于是$\eta^*$，$\eta_1$，…，$\eta_{n-r}$线性无关。

又因为 $\eta-\eta^*$是齐次线性方程组的解向量，$\eta_1-\eta^*$，$\eta_2-\eta^*$，…，$\eta_{n-r}-\eta^*$齐次线性方程组**Ax=*0***的一个基础解系，所以，

$$\eta-\eta^*=c_1(\eta_1-\eta^*)+c_2(\eta_2-\eta^*)+\dots$$
$$+c_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta^*)$$

即 $\eta=c_0\eta^*+c_1\eta_1+\dots+c_{n-r}\eta_{n-r}$

此处的$c_0=1-c_1-\dots-c_{n-r}$，即$c_0+c_1+\dots+c_{n-r}=1$。

此例说明，非齐次线性方程组的任意解向量可用该方程组自身的**n－r＋1**个解向量的线性组合来表示，但其组合系数必等于**1**。这是非齐次线性方程组的任意解向量的另一种表示方式。