1　向量的定义

定义　n个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$所组成的数组称为 n维向量.这n个数称为该向量的分量，第i个数 a_i称为第 i个分量.

分量全为实数的向量称为**实向量**.

分量全为复数的向量称为**复向量**.

n维向量写成列的形式 ,称为列向量 ,即

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

n维向量写成行的形式 ,称为行向量 ,即

$$a^T = (a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n)$$

向量的相等

设 $a^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n),b^T=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

则 $a^T=b^T \Leftrightarrow a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$

零向量

分量全为0的向量称为零向量.

$a^T=O \Leftrightarrow a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$

$a^T\neq O \Leftrightarrow a_i$中至少有一个不为 $0,(i=1,2,\cdots,n)$

负向量

向量$a^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的负向量记作$-a^T$,且

$-a^T=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$.

2 向量的线性运算

向量加法

设$a^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n),b^T=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,定义

向量a^T与b^T的加法为:

$$a^T+b^T=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

向量减法定义为

$$a^T-b^T=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$$

数乘向量

数k与向量 a^T 的乘积，称为向量的数量乘法简称数乘向量，定义为

$$k\,a^T=(k\,a_1,k\,a_2,\cdots,k\,a_n)$$

向量加法和数乘向量运算称为向量的**线性运算**，满足下列八条运算规则：

(1)加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha;$

(2)加法结合律 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma);$

(3)对任一个向量α,有$\alpha+O=\alpha;$

(4)对任一个向量α,存在负向量$-\alpha$,有

$$\alpha+(-\alpha)=O;$$

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6)数乘结合律 $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7)数乘分配律 $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8)数乘分配律 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

其中α,β,γ为n维向量,$1,k,l$为数,O为零向量.

除了上述八条运算规则，显然还有以下性质：

$(1')$ $0\alpha = O, kO = O$(其中0为数零,k为任意数);

$(2')$若$k\alpha = O$,则或者$k = 0$,或者$\alpha = O$;

$(3')$向量方程$\alpha + x = \beta$有唯一解$x = \beta - \alpha$.

3　线性组合

若干个同维数的列（行）向量所组成的集合叫做向量组.

定义　给定向量组 $A: \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$，对于任何一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，向量

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合，$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为这个线性组合的系数 .

4　线性表示

定义　给定向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和向量 b,如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$b=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m,$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合，这时称向量 b 能由向量组 A 线性表示.

定理 向量b能由向量组A线性表示的充分必要条件是矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$的秩等于矩阵$B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b)$的秩.

定义 设有两个向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$及$B:b_1,b_2,\cdots,b_s$,若B组中的每个向量都能由 向量组A线性表示,则称向量组 B能由向量组 A线性表示. 若向量组A与向量组 B能相互线性表示 ,则称这两个向量组等价 .

5　线性相关

定义　给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$，如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0,$$

则称向量组 A 是线性相关的，否则称它线性无关．

定理　向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的秩小于向量个数 m；向量组线性无关的充分 必要条件是 $R(A) = m$.

定理

(1)若向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$线性相关,则向量组$B: a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$也线性相关.反言之,若向量组$B$线性无关,则向量组$A$也线性无关.

(2)设$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}, b_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{r+1,j} \end{pmatrix}, (j = 1, 2, \cdots, m)$

即向量a_j添上一个分量后得到向 量b_j.若向量

组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关,则向量组$B:b_1,b_2,\cdots,b_m$也线性无关.反言之,若向量组B线性相关,则向量组A也线性相关.

(3)m个n维向量组成的向量组,当维数n小于向量个数m时一定线性相关.

(4)设向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关,而向量组$B:a_1,a_2,\cdots,a_m,b$线性相关,则向量b必能由向量组A线性表示,且表示式是唯一的.

6 向量组的秩

定义 设有向量组A,如果在A中能选出r个向量a_1, $a_2,\cdots,a_r$,满足

(1)向量组 $A_0: a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关;

(2)向量组A中任意$r+1$个向量(如果A中有$r+1$个向量的话)都线性相关,

那么称向量组 A_0是向量组A的一个最大线性无关向量组(简称最大无关组);最大无关组所含向量个数r称为向量组A的秩.

定理　矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

定理　设向量组B能由向量组A线性表示，则向量组B的秩不大于向量组A的秩.

推论 1　等价的向量组的秩相等.

推论 2　设 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$,则

$$R(C)\le R(A), R(C)\le R(B).$$

推论 3　（最大无关组的等价定义）

设向量组 B 是向量组 A 的部分组，若向量组 B 线性无关，且向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则向量组 B 是向量组 A 的一个最大无关组.

7　向量空间

定义　设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合V为向量空间.

所谓封闭，是指在集合V中可以进行加法及数乘两种运算：若$a \in V, b \in V$，则$a + b \in V$；若$a \in V, \lambda \in R$，则$\lambda a \in V$.

一般地,由向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 所生成的向量空间为

$$V=\left\{x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i \middle| \ \lambda_i\in R, i=1,2,\cdots,m\right\}.$$

8　子空间

定义　设有向量空间 V_1 及 V_2，若 $V_1 \subset V_2$，就称 V_1 是 V_2 的子空间.

任何由 n 维向量所组成的向量空间 V 都是 R^n 的子空间.

9　基与维数

定义　设V为向量空间，如果r个向量$a_1,a_2,\cdots,a_r\in V$，且满足

(1) $a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关；

(2) V中任一向量都可由$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性表示，

那么，向量组$a_1,\cdots,a_r$就称为向量空间V的一个基，r称为向量空间V的维数，并称V为r维向量空间．

若向量空间没有基，那么V的维数为0. 0维向量空间只含一个零向量 O.

若把向量空间 V看作向量组，则V的基就是向量组的最大线性无关组，V的维数就是向量组的秩.

向量空间的构造

若向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$是向量空间 V的一个基，则V可表示为

$$V = \left\{ x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \,\middle|\, \lambda_i \in R, i = 1,2,\cdots,r \right\}.$$

１０　齐次线性方程组

向量方程

记齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

的系数矩阵和未知量为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则(1)式可写成向量方程

$$Ax=O. \qquad (2)$$

解向量

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 为(1)的解，则

$$x = \xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组 (1)的解向量，它也就是向量方程 (2) 的解.

解向量的性质

性质 1 若$x=\xi_1, x=\xi_2$为(2)的解，则$x=\xi_1+\xi_2$也是(2)的解.

性质 2 若$x=\xi_1$为(2)的解，k为实数，则$x=k\xi_1$也是(2)的解.

定义 设S为方程组(1)的全体解向量所组成的集合，则集合S对向量的线性运算封闭，所以集合S是一个向量空间，称为齐次线性方程组(1)的解空间.

定理 n元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=O$的全体解所构成的集合S是一个向量空间,当系数矩阵的秩$R(A_{m\times n})=r$时,解空间S的维数为$n-r$.

定义 解空间S的基称为方程组(1)的基础解系.

1 1　非齐次线性方程组

向量方程

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad (3)$$

可写为向量方程

$$Ax=b \qquad (4)$$

解向量

向量方程 (4)的解就是方程组 (3)的解向量.

解向量的性质

性质 1 若$x=\eta_1, x=\eta_2$为(4)的解,则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次线性方程 组

$$Ax=O \qquad (5)$$

的解.

性质 2 若$x=\eta$是方程(4)的解,$x=\xi$是方程(5)的解,则$x=\xi+\eta$也是方程(4)的解.

1 2　线性方程组的解法

（1）求齐次线性方程组的基础解系

若齐次线性方程组 $Ax = O$ 的秩 $R(A) = r$，而方程组中未知数的个数为 n，那么方程组的一个基础解系含线性无关的 $n - r$ 个解向量，不妨设为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$，可按下面步骤进行：

第一步：对系数矩阵A进行初等行变换，使其变成行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$

第二步：将第$r+1, r+2, \cdots n$列前r个分量反号，于是得$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$的第$1,2,\cdots,r$个分量，即

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\-c_{2,r+1}\\\vdots\\-c_{r,r+1}\\*\\\vdots\\*\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\-c_{2,r+2}\\\vdots\\-c_{r,r+1}\\*\\\vdots\\*\end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1,n}\\-c_{2,n}\\\vdots\\-c_{r,n}\\*\\\vdots\\*\end{pmatrix};$$

第三步：将其余 $n-r$ 个分量依次组成 $n-r$ 阶单位矩阵，于是得齐次线性方程组的一个基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\-c_{2,r+1}\\\vdots\\-c_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\-c_{2,r+2}\\\vdots\\-c_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1,n}\\-c_{2,n}\\\vdots\\-c_{r,n}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

（２）求非齐次线性方程组的特解

若非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的秩 $R(A) = R(B) = r$，而方程组中未知数的个 数为 n，那么对增广矩阵 B 进行初等行变换，使其成为行最简形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

将上述矩阵中最后一列的前 r 个分量依次作为特解的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量，其余 $n-r$ 个分量全部取零，于是得

$$\eta^{*}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

即为所求非齐次线性方程组的一个特解.

典　型　例　题

- 一、向量组线性关系的判定
- 二、求向量组的秩
- 三、向量空间的判定
- 四、基础解系的证法
- 五、解向量的证法

一、向量组线性关系的判定

线性相关与线性无关的概念都是针对一个特定的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$而言的,当我们考虑到向量空间中两种基本运算的结合物－－线性组合$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$时,其结果为向量空间中的一个特殊向量－零向量,那么,一个自然的问题是:是否存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,也使得其线性组和为零向量?

答案只有两种：存在或不存在.这样,也就自然而然地提出了线性相关与线性无关的概念；若存在,则称该向量组线性相关；若不存在,则称该向量组线性无关,所谓不存在,指的是当且仅当

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

时,才有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_m\alpha_m = 0.$$

线性相关与线性无关还可以通过线性表出的概念来体现,即看其中有无某个向量(不是任意一个向量),可由其余向量线性表出?此外,还应注意到:线性相关与线性无关是一对排中对立的概念,据此,在论证某些相关性问题时,我们往往采用反证法.

研究这类问题一般有两个方法

方法1　从定义出发

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m=0,$

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1n}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2n}\end{pmatrix}+\cdots+k_m\begin{pmatrix}a_{m1}\\a_{m2}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

整理得线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{m1}k_m = 0, \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{m2}k_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \cdots + a_{mn}k_m = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

若线性方程组 (*)只有唯一零解，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关.

若线性方程组 (*)有非零解，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关.

方法 2　利用矩阵的秩与向量组的秩之间关系判定

给出一组$\boldsymbol{n}$维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，就得到一个相应的矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，首先求出$R(A)$.

若$R(A)=m$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，

若$R(A)<m$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

例 1 研究下列向量组的线性相关性

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

解一 令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

整理得到
$$\begin{cases} k_1 \quad\quad - k_3 = 0, \\ -2k_1 + 2k_2 \quad\quad = 0, \\ 3k_1 - 5k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

$\because$ 线性方程组 $(*)$的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$\therefore$ 线性方程组 $(*)$必有非零解 ,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 .

解二

$$\because \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \text{矩阵} A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2<3,$

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

例2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，证明：存在不全为零的数 $t_1,t_2,\cdots,t_r$，使对任何向量 β 都有

$$\alpha_1+t_1\beta,\alpha_2+t_2\beta,\cdots,\alpha_r+t_r\beta(r\geq 2)$$

线性相关.

分析 我们从定义出发，考察向量方程

$$k_1(\alpha_1+t_1\beta)+k_2(\alpha_2+t_2\beta)+\cdots+k_r(\alpha_r+t_r\beta)=0$$

即向量方程

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$

$$+(k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_rt_r)\beta=0$$

是否有某组不全为零的 数$k_1, k_2, \cdots, k_r$,而使得对每个β恒有非零解,因此可得如下证明.

证明 因为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关,所以存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

考虑线性方程

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_r x_r = 0$$

因为$r \geq 2$,它必有非零解,设$(t_1, t_2, \cdots, t_r)$为任一非零解,则对任意向量 β,都有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$
$$+ (k_1t_1 + k_2t_2 + \cdots + k_rt_r)\beta = 0$$

即

$$k_1(\alpha_1 + t_1\beta) + k_2(\alpha_2 + t_2\beta)$$
$$+ \cdots + k_r(\alpha_r + t_r\beta) = 0$$

由$k_1, k_2, \cdots, k_r$不全为零得知：

$$\alpha_1 + t_1\beta, \alpha_2 + t_2\beta, \cdots, \alpha_r + t_r\beta$$

线性相关.

例3 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩是$r$,证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意$r$个线性无关的向量均构成它的一个最大线性无关组.

分析 证明向量组的一个部分组构成最大线性无关组的基本方法就是:

根据最大线性无关组的定义来证，它往往还与向量组的秩相联系.

证明 不失一般性，设$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中的任意$r$个线性无关的向量，于是对于任意的$\alpha_k(k=1,2,\cdots,s)$,向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_k$线性相关,否则这向量组的秩大于 r.

又向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关，所以$\alpha_k$可以由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出.

由定义,这就证明了$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个最大线性无关组 .

二、求向量组的秩

求一个向量组的秩，可以把它转化为矩阵的秩来求，这个矩阵是由这组向量为行（列）向量所排成的.

若矩阵$\boldsymbol{A}$经过初等行（列）变换化为矩阵$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$中任何对应的列（行）向量组都有相同的线性相关性.

如果向量组的向量以列（行）向量的形式给出，把向量作为矩阵的列（行），对矩阵作初等行（列）变换，这样，不仅可以求出向量组的秩，而且可以求出最大线性无关组.

例4 求向量组

$$\alpha_1^T=(1,\quad -1,\quad 0,\quad 0),\qquad \alpha_2^T=(-1,\quad 2,\quad 1,\quad -1),$$
$$\alpha_3^T=(0,\quad 1,\quad 1,\quad -1),\qquad \alpha_4^T=(-1,\quad 3,\quad 2,\quad 1),$$
$$\alpha_5^T=(-2,\quad 6,\quad 4,\quad 1)$$ 的秩.

解 作矩阵$A=(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4\quad \alpha_5)$,对$A$作初等行变换,化$A$为阶梯形

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+(-1)r_2}{\underset{\sim}{r_4+r_2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_4 \leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{记作}}{=}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{pmatrix} = U.$$

$$U=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A的列秩 $=R(A)=3,$

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为3.

又β_1,β_2,β_4是U的列向量组的一个最大 线性无关组,

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$也是$A$的列向量组的一个最大线性无关组.

三、向量空间的判定

判断向量的集合是否构成向量空间，需看集合是否对于加法和数乘两种运算封闭．若封闭，则构成向量空间；否则，不构成向量空间．

例5 判断 R^3 中与向量 $(0,0,1)$ 不平行的全体向量所组成的集合是否构成 向量空间．

解 R^3 中与向量 $(0,0,1)$ 不平行的全体向量所组成的集合不构成向量空 间．

$\because$ 对向量

$$\alpha_1 = (0, k, 0), \alpha_2 = (0, -k, 1)(k \neq 0),$$

α_1, α_2均不平行于 $(0,0,1)$，但

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (0,0,1).$$

因此 R^3中与向量 $(0,0,1)$不平行的全体向量所组成的集合对加法不 封闭.

故所给向量集合不构成 向量空间.

四、基础解系的证法

例 6 证明与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系.

分析 要证明某一向量组是方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的基础解系，需要证明三个结论:

(1)该组向量都是方程组的解;

(2)该组向量线性无关;

(3)方程组的任一解均可由该向量组线性表示.

证明 设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是方程组$AX=0$的一个基础解系，$a_1,a_2,\cdots,a_n$是与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$等价的线性无关的向量组，因为等价的线性无关的向量组所含向量个数是相同的，所以这两个向量组所含向量个数相等，即$t=n$.

由向量组的等价关系易知，a_i可以表示成$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$的线性组合$(i=1,2,\cdots,t)$，而解的线性组合仍然是原方程组的解，故$a_1,a_2,\cdots,a_t$都是

$$AX=0$$

的解.

由题设知，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_t$线性无关.

设η为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的任一解，则$\eta$可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性表示，由向量组的等价性，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$均可由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_t$线性表示，故$\eta$也可由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_t$线性表示.

故由定义知，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_t$也是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

注　当线性方程组有非零解时，基础解系的取法不唯一，且不同的基础解系之间是等价的.

五、解向量的证法

例7 设ξ^*是非齐次线性方程组$AX=B$的一个解，$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$是其导出组的一个基础 解系.证明：

(1)$\xi^*,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关；

(2)$\xi^*,\xi^*+\eta_1,\cdots,\xi^*+\eta_{n-r}$是方程组$AX=B$的$n-r+1$个线性无关的解.

(3)方程组$AX=B$的任一解X，都可以表示为这$n-r+1$个解的线性组合，而且组合系数之和为1.

证明　(1)令 $k_0\xi^* + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0,\quad (*)$

其中必有 $k_0 = 0.$

否则,有 $\xi^* = -\dfrac{k_1}{k_0}\eta_1 - \cdots - \dfrac{k_{n-r}}{k_0}\eta_{n-r}$,由于 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的解,故等式右边为其线性组合,必是 $AX = 0$ 的解,而等式左边 ξ^* 是非齐次方程组 $AX = B$ 的解,矛盾,所以 $k_0 = 0.$

将 $k_0 = 0$ 代入(*)式,则有

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0,$$

因为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是$AX=0$的基础解系,所以$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关,故有

$$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0,$$

于是$\xi^*,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关.

(2)由线性方程组解的性质知$\xi^*+\eta_i(i=1,2,\cdots,n-r)$都是$AX=B$的解,再证它们线性无关.

令$k_0\xi^*+k_1(\xi^*+\eta_1)+\cdots+k_{n-r}(\xi^*+\eta_{n-r})=0,$

则$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\xi^*+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0,$

由(1)的证明知$\xi^*,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关,所以

$$\begin{cases} k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r} = 0, \\ k_1 = 0, \\ k_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n-r} = 0, \end{cases}$$

解之,得

$$k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0,$$

故$\xi^*,\xi^*+\eta_1,\xi^*+\eta_2,\cdots,\xi^*+\eta_{n-r}$线性无关.

(3)设X为方程组$AX=B$的任一解,则X可表为

$$X=\xi^*+t_1\eta_1+t_2\eta_2+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r}$$

$$=\xi^*+t_1(\xi^*+\eta_1-\xi^*)+\cdots+t_{n-r}(\xi^*+\eta_{n-r}-\xi^*)$$

$$=(1-t_1-\cdots-t_{n-r})\xi^*+t_1(\xi^*+\eta_1)+\cdots$$

$$+t_{n-r}(\xi^*+\eta_{n-r})$$

令$1-t_1-\cdots-t_{n-r}=t_0$,则$t_0+t_1+\cdots+t_{n-r}=1$,

故$AX=B$的任一解 X都可以表示为

$$X = t_0\xi^* + t_1(\xi^* + \eta_1) + \cdots + t_{n-r}(\xi^* + \eta_{n-r}),$$

且 $t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-r} = 1.$

注意(1)本例是对非齐次线性方程组 $AX = B$ 的解的结构作进一步的分析和讨论，即非齐次线性方程组一定存在着 $n-r+1$ 个线性无关的解，题中(2)的证明表明了它的存在性.

(2)对齐次线性方程组，当 $R(A) = r < n$ 时，有无穷多组解，其中任一解可由其基础解系线性表示.

(3)对非齐次线性方程组 $AX = B$ ，有时也把如题中所给的 $n-r+1$ 个解称为 $AX = B$ 的基础解系，所不同的是它的线性组合只有当线性组合系数之和为1时，才是方程组的解.

第四章　　测试题

一、填空题（每小题5分，共40分）.

1. 设$\alpha_1=(2,-1,0,5),\alpha_2=(-4,-2,3,0)\alpha_3=(-1,0,1,k),$
$\alpha_4=(-1,0,2,1),$则$k=$____时,线性相关.

2. 设$\alpha_1=(2,-1,3,0),\alpha_2=(1,2,0,-2),\alpha_3=(0,-5,3,4),$
$\alpha_4=(-1,3,t,0),$则$t=$____时,线性无关.

3. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4),\alpha_2=(2,3,4,5),\alpha_3=$
$(3,4,5,6),\alpha_4=(4,5,6,7),$则该向量组的秩是 ______

4. n维单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$均可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,则向量个数 ________

5. 已知$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$则秩$R(A)=$________

6. 方程组$AX=0$以$\eta_1=(1,0,2),\eta_2=(0,1,-1)$为其基础解系,则该方程的系数矩阵为 ________

7. 设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta=(1,2,3),A=\alpha\beta$,则秩$R(A)=$ ______

8. 向量组$\alpha_1=(1,2,3,4),\alpha_2=(2,3,4,5),\alpha_3=(3,4,5,6)$
$\alpha_4=(4,5,6,7)$的一个极大无关组是 ________

二、计算题（每小题8分，共24分）.

1. 已知$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\beta=0$,其中$\alpha_1=(5,-8,-1,2)$,
$\alpha_2=(2,-1,4,-3),\alpha_3=(-3,2,-5,4)$,求$\beta$.

2. 已知向量组 $\alpha_1=(t,2,1),\alpha_2=(2,t,0),\alpha_3=(1,-1,1)$ 试求出 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，线性无关？

3. 求实数 a 和 b，使向量组 $\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,1,1,0)$ $\alpha_3=(0,0,1,1)$ 与向量组 $\beta_1=(1,a,b,1),\beta_2=(2,1,1,2),$ $\beta_3=(0,1,2,1)$ 等价.

三、证明题（每小题8分，共24分）.

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，试证明 $\det(AB)=0$.

2. 设A为$n\times n$矩阵, B是$n\times s$矩阵, 且秩$R(B)=n$, $(n\leq s)$, 证明

(1) 若$AB=0$, 则$A=0$;

(2) 若$AB=B$, 则$A=E$.

3. 已知向量组$(I)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; $(II)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$; $(III)\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$如果各向量组的秩分别 为$R(I)=R(II)=3$, $R(III)=4$, 试证明:向量组:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为4.

四、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，问常数 l,m 满足什么条件时，向量组 $l\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关．（12分）

测试题答案

一、1. $-\dfrac{3}{15}$;　2. 任意实数；3. 2;　4. $n \le s$;

5. 5;　6. $(-2 \quad 1 \quad 1)$;　7. 1;　8. α_1, α_2.

二、1. $\beta = (0,1,2-2)$;

2. 当$t \neq -2,3$时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关;

当$t = -2,3$时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

3. $a = b = 0$.

四、$lm \neq -1$.