第二节 实对称矩阵的相似对角化

- 如上面的讨论中看到的,一般的方阵不一定可对角化，但对于在应用中常常遇到的实对称矩阵（满足$A'=A$的实矩阵），不仅一定可以对角化，而且解决起来要简便得多，这是由实对称矩阵的特征值和特征向量的特性所决定的。

定理1 实对称矩阵的特征值为实数。

设复数λ为实对称矩阵A的特征值，复向量x为对应的特征向量，即$Ax=\lambda x$，$x\neq 0$。用$\overline{\lambda}$表示λ的共轭复数，$\overline{x}$表示x的共轭复向量，则

$$A\bar{\mathbf{x}} = \overline{A}\bar{\mathbf{x}} = \overline{(A\mathbf{x})} = \overline{(\lambda\mathbf{x})} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$$

于是有

$$\bar{\mathbf{x}}'A\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}'(A\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}'\lambda\mathbf{x} = \lambda\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x},$$

$$\bar{\mathbf{x}}'A\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}'A')\mathbf{x} = (A\bar{\mathbf{x}})'\mathbf{x} = (\bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}})'\mathbf{x} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x}.$$

两式相减，得

$$(\lambda-\bar{\lambda})\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x}=0$$

但因$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，所以

$$\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0,$$

故 $\lambda-\bar{\lambda}=0$，即 $\lambda=\bar{\lambda}$，这就说明λ为实数。

定理2 设λ_1，λ_2是实对称阵A的两个特征值，p_1，p_2是对应的特征向量。若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则p_1，p_2正交。

证 $\lambda_1 p_1 = A p_1$，$\lambda_2 p_2 = A p_2$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$。

因A对称，故

$$\lambda_1 p_1' = (\lambda_1 p_1)' = (A p_1)' = p_1' A' = p_1' A,$$

于是，

$$\lambda_1 p_1' p_2 = p_1' A p_2 = p_1' (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 p_1' p_2,$$

即 $(\lambda_2 - \lambda_1) p_1' p_2 = 0$

但$\lambda_1 \neq \lambda_2$，故$p_1' p_2 = 0$，即p_1与p_2正交。

定理3 设A为n阶对称阵，λ为A的特征方程的r重根，则方阵$A - \lambda E$的秩$R(A - \lambda E) = n - r$，从而对应特征值λ恰有r个线性无关的特征向量。

由此定理再结合上一节定理1，容易得到如下结论：n阶对称阵A必有n个线性无关的特征向量，从而n阶对称阵一定可以对角化。不仅如此，将实对称阵A相似变换成对角阵的相似变换矩阵还可以是正交阵。

定理4 设A为n阶实对称阵，则必有正交阵P，使$P^{-1}AP = \Lambda$，其中Λ是以A的n个特征值为对角元素的对角阵。

证 设A的互不相等的特征值为λ_1，λ_2，…，λ_s，它们的重数分别为r_1，r_2，…，r_s（$r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$）。由定理3知，对应特征值$\lambda_i$ $(i = 1,2,\dots,s)$恰有r_i个线性无关的实特征向量，把它们正交化并单位化，即得r_i个单位正交的特征向量。由$r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$知这样的特征向量共有n个。又由定理6知对应于不同的特征值的特征向量正交，故这n个单位特征向量两两正交。于是以它们为列向量构成正交阵P，并有$P^{-1}AP = \Lambda$，其中对角阵Λ的对角元素含r_1个λ_1，…，r_s个λ_s，恰是A的n个特征值。

定理4的证明实际上提供了将n阶实对称阵A对角化的方法：

1. 求出A的所有特征值λ_1，λ_2，…，λ_s，其中λ_i为A的n_i重特征根（i=1，2，…，s）且$n_1+n_2+\ldots+n_s=n$。
2. 对每个特征值λ_i，解齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)x=0$，求得一个基础解系，并将它们正交化（i=1，2，…，s），得到一个正交向量组。
3. 将得到的所有的正交向量组单位化。
4. 用得到的正交单位向量组（列向量组）构成正交阵P，则有$P^{-1}AP=\Lambda$，且对角阵Λ的主对角元素是A的n个特征值。

❖ 注意：

1. 此时得到的P为正交阵，从而P–1AP=Λ等价于P′AP=Λ。因此，这种方法称为用正交变换化实对角阵为相似对角形。

2. 由于基础解系的选取不是唯一的，而且构成P的列矩阵的排列顺序可以是任意的，所以P不是唯一的；对角阵Λ的主对角元素的排列顺序与P的列向量组的排列顺序相对应。

例1设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

求一个正交阵P，使**P–1AP=Λ**为对角阵。

解 **A**的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(3-\lambda)(3+\lambda)$$

故得**A**的特征值**λ1 = –3**，**λ2 = 0**，**λ3 = 3**。

解齐次方程组

(A – λiE) x = 0

求特征向量。

当λ1 = –3，有

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

当λ2 = 0时，有

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得基础解系

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当λ3 = 3时，有

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得基础解系

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以验证ξ1，ξ2，ξ3两两正交，下面进一步将它们单位化：

$$p_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix},\quad p_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\quad p_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

构造正交阵

$$P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\-2&1&2\end{bmatrix}$$

则有

$$P^{-1}AP=P'AP=\begin{bmatrix}-3&&\\&0&\\&&3\end{bmatrix}$$

例2 设

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求一个正交阵P，使P–1AP=Λ为对角阵。

解 A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

故得A的特征值λ1 = –3，λ2 = λ3 = λ4 = 1。

解齐次方程组

$$(A-\lambda_i E)x=0$$

求特征向量。

当λ1 = –3，有

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得基础解系

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}'$$

当λ2 = λ3 = λ4 = 1时，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \xi_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

对ξ**1**，ξ**2**，ξ**3**应用施密特正交化方法，得

$$\zeta_2=\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\zeta_3 = \xi_2 - \frac{[\xi_2, \zeta_2]}{[\zeta_2, \zeta_2]}\zeta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\zeta_4 = \xi_3 - \frac{[\xi_3, \zeta_3]}{[\zeta_3, \zeta_3]}\zeta_3 - \frac{[\xi_3, \zeta_2]}{[\zeta_2, \zeta_2]}\zeta_2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

然后对 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ 标准化：

$$\mathbf{p}_1=\frac{\zeta_1}{\|\zeta_1\|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{p}_2=\frac{\zeta_2}{\|\zeta_2\|}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3=\frac{\zeta_3}{\|\zeta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{p}_4=\frac{\zeta_4}{\|\zeta_4\|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\3\end{bmatrix}$$

令

$$\mathrm{P}=[\mathbf{p}_1\quad \mathbf{p}_2\quad \mathbf{p}_3\quad \mathbf{p}_4]$$

则P是正交阵，且满足

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$