第三节 约当(Jordan)标准形简介

❖ 上一节定理1说明，n阶矩阵A与对角阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。本节说明当只有m (m<n)个线性无关的特征向量时，A一定与由约当块组成的约当形矩阵相似。

一. 约当块和约当形矩阵

定义1 形如

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中：

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

叫做约当形矩阵，**Ji**叫做约当块。

当**J1 = [λ1]**，**J2 = [λ2]**，**…**，**Js = [λs]**都是一阶约当块时，**J**为对角阵，所以对角阵为约当阵的特例。

A和约当形矩阵相似，即存在可逆阵**P**，使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

Ji中的λ**i**显然是**A**的特征值，但当**i ≠ j**时，λ**i**和λ**j**可能相等。然而，**P**中的列向量却并非都是**A**的特征向量。

我们把与**A**相似的约当标准型矩阵称为**A**的约当标准形。约当标准形的理论比较复杂，我们仅介绍这个理论的要点（不作证明）和约当标准形的方法。

定义2　如矩阵$A = (a_{ij})$的元素a_{ij}是λ的多项式，就称A为λ矩阵，记作$A(\lambda)$。

例如A的特征矩阵$\lambda E - A$是一个λ矩阵。

λ矩阵也可以作初等变换，它的三种初等变换为：

1. 矩阵的两行(列)对换位置。
2. 矩阵的某行(列)乘以非零常数；
3. 矩阵的某行(列)乘多项式$\varphi(\lambda)$加到另一行(列)；

定义3　λ矩阵$A(\lambda)$经初等变换化为$B(\lambda)$，称$A(\lambda)$和$B(\lambda)$是相抵的，记作$A(\lambda) \cong B(\lambda)$。

定理1 任一个n阶矩阵A的特征矩阵$A(\lambda) = \lambda E - A$都相抵于一个对角形λ矩阵，即

$$A(\lambda) = (\lambda E - A) \cong \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{bmatrix} = D(\lambda) \qquad (5)$$

且

$$A_k(\lambda) = D_k(\lambda) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad （6）$$

其中

1. $d_i(\lambda)$（$i=1$，2，…，n）是首一多项式（即λ的最高次项系数为1）；
2. $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$（即$d_{i+1}(\lambda)=q_i(\lambda)d_i(\lambda)$，$q_i(\lambda)$也是λ的多项式）（$i=1$，2，…，$n$）
3. $A_k(\lambda)$和$D_k(\lambda)$分别表示$A(\lambda)$和$D(\lambda)$中全部k阶子式的最高公因式

由定理的结论可知：

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\ldots d_k(\lambda), \quad (7)$$

$k=1$，2，…，n，

$$D_1(\lambda) = D_1(\lambda)=A_1(\lambda) \quad (8)$$

$$A_k(\lambda) = D_k(\lambda)=D_{k-1}(\lambda)d_k(\lambda)=A_{k-1}(\lambda)d_k(\lambda)$$

所以　 $d_k(\lambda)=A_k(\lambda)/A_{k-1}(\lambda), k=1,2,\ldots,n.$　　(9)

由此可见，$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，…，$d_n(\lambda)$是由$A(\lambda)=\lambda E-A$唯一确定的，它们称为$A-\lambda E$的不变因子（简称为A的不变因子）。由于$A_n(\lambda) = |\lambda E - A| = D_n(\lambda)$是λ的n次多项式，所以n个不变因子的次数和等于n

例3 求三阶矩阵

$$J=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

的特征矩阵$J(\lambda)=\lambda E - J$的不变因子。

解 [方法1] 根据(8)式及(9)式dk(λ)=Ak(λ)/Ak-1(λ)求不变因子。

先把

$$J(\lambda)=(\lambda E-J)=\begin{bmatrix}\lambda-a & -1 & 0\\ 0 & \lambda-a & -1\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix}$$

的所有的一阶、二阶子式及三阶子式求出来，然后容易求得它们的最高公因式分别为：

J1(λ)=1，J2(λ)=1，J3(λ)=(λ–a)3，

于是得J(λ)的不变因子：

d1(λ)=J1(λ)=1，d2(λ)=J2(λ)/J1(λ)，

d3(λ)=J3(λ)/J2(λ)=(λ–a)3。

[方法2] 用初等变换，把J(λ)=λE – J化成(6.4.1)的形式。

$$(\lambda E-J)=\begin{bmatrix}\lambda-a & -1 & 0\\ 0 & \lambda-a & -1\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+c_2\times(\lambda-a)}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ (\lambda-a)^2 & \lambda-a & -1\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_2]{r_2+r_1\times(\lambda-a)}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-a)^2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3\times(\lambda-a)^2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & (\lambda-a)^3 & \lambda-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{r_3+r_2\times(\lambda-a)}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-a)^3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1\times(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-a)^3\end{bmatrix}$$

故$J(\lambda)=\lambda E-J$的不变因子为1，1，$(\lambda-a)^3$。

由于**n**次多项式在复数域上一定可以分成**n**个一次因式的乘积，因此**λ–a**的次数大于等于**1**的不变因子都可以分解为若干个一次因式幂的乘积，这些一次因式的幂称为**A**的初等因子。但是**A(λ)**的初等因子中,同样的一次因子的幂可能重复出现。如例**7**中**J(λ)=λE–J**的初等因子为**(λ–a)3**。又如当

$$\lambda E - A \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (\lambda-3)^2 & \\ & & & & (\lambda+1)(\lambda-3)^2 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

时，A的初等因子为$(\lambda-3)^3$，$(\lambda-3)^2$，$(\lambda+1)$。

定理2 $A\sim B$的充分必要条件是$\lambda E-A\cong\lambda E-B$。

定理3 $A\sim B$的充分必要条件是$\lambda E-A$和$\lambda E-B$有完全相同的初等因子。

定理4 若n阶矩阵A的特征矩阵$\lambda E-A$的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{m_k},\text{其中}\sum_{i=1}^{k}m_i=n$$

则

$$A\sim J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i},\qquad i=1,2,\cdots,k。$$

说明：

1. 由于λE–A存在初等因子，且由A唯一确定，又A的初等因子的次数和等于矩阵的阶数，因此由定理12可知，任一个n阶矩阵在复数域上都与一个约当标准形相似。
2. 在约当标准形J中改变约当块的排列次序，不影响λE–J的初等因子。因此，如果不考虑约当块的排列次序，矩阵A的约当标准型J是唯一的。
3. 由定理4可知，A与对角阵相似的充要条件是λE–A的初等因子都是一次因式。

例4 已知

$$\lambda E - A \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (\lambda-3)^2 & \\ & & & & (\lambda+1)(\lambda-3)^2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda E - B \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda+4)(\lambda+3)^4 \end{bmatrix}$$

试求矩阵A，B的约当标准形。

解　有已知条件可知，（λE–A）的初等因子为 (λ–3)2，(λ–3)2，(λ+1)；（λE–B）的初等因子为 (λ+3)4，(λ+4)。所以

$$A \sim J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

或

$$A \sim J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{-1} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

或

$$A \sim J = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$B \sim J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}} & \\ & \boxed{-4} \end{bmatrix}$$

或

$$B \sim J = \begin{bmatrix} \boxed{-4} & & & & \\ & -3 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -3 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & -3 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

例**5**　求

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

的约当标准形。

解

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda+1 & 0 \\ 8\lambda-28 & 8 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 8\lambda-28 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 8\lambda-28 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -44 & \lambda+2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{44}(\lambda+2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -44 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

所以λ**E–A**的初等因子是λ**+2，(**λ**–1)2，**因此**A**的约当标准形为

$$\begin{bmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix}$$

例6　设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

问：A是否与对角阵相似？如不与对角阵相似，求可逆矩阵P，使得P–1AP为约当标准形。

解

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

A的特征值为λ1 = λ2 = 1，λ2 =2。二重特征值λ1=λ2=1的特征向量只有一个，即x1= (0，0，1)′故A不能与对角阵相似.

求A的约当标准形可按例3或例1的解法,得

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

即存在可逆矩阵P，使得 P–1AP = J。设

$$P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3],$$

则 **AP = PJ，**

$$A[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

于是

$$A\xi_1=\xi_1,\quad A\xi_2=\xi_1+\xi_2,\quad A\xi_3=2\xi_3$$

其中：**ξ1**是对应于λ**1=1**的特征向量，

即**ξ1=X1=[0，0，1]′**；**ξ3**是**A**的对应于λ**2=2**的特征向量，易得

ξ3=[2，1，–6]′；**ξ2**不是**A**的特征向量，但将**ξ2**代入**Aξ2=ξ1+ξ2** 即 **(A–E)ξ2 = ξ1**。便可解得。

因此取

$$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

就可使

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

由于特征向量ξ1,ξ2的取法可以不同，从而ξ2也可不同，故P不是唯一的。

由此例求P的方法可知，如果A的约当标准形由S个约当块组成，则A有S个线性无关的特征向量；反之亦然。

但是，读者必须注意，我们求得了**A**的**S**个线性无关的特征向量，并不能立即写出它的**S**个约当块。例如，λ**i**是**A**的四重特征值，**A**属于λ**i**的线性无关的有两个，**A**的约当标准形中以λ**i**为主对角元的约当块必有两块，但它们可能有两种情况：

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & & \\ 0 & \lambda_i & & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ & 0 & \lambda_i & 1 \\ & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

当然对于给定的**A**，必是二者之一。