第六章 二次型

第一节 二次型的定义及其矩阵表示

定义1 含有**n**个变量的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+$$

$$2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad \textbf{(1)}$$

称为二次型。当$\mathbf{a_{ij}}$为复数时，**f** 称为复二次型。当$\mathbf{a_{ij}}$为实数时，**f** 称为实二次型，本章仅讨论实二次型。

若令 $a_{ji}=a_{ij} \qquad i<j$

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+$$

$$a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+$$

$$\cdots+\boldsymbol{a_{n1}}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

即 $$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

若记 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x' A x$$

把A称为二次型（1）对应的矩阵，A的秩称为二次型（1）的秩。

例1 求二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 - x_2^2 + 5x_2x_3 + 2x_3^2 + 4x_4^2$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

对于二次曲面

$$ax^2+bxy+cy^2=d$$

我们可以通过一个坐标旋转

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

把二次曲面化为标准形

$$a'x'^2+c'y'^2=d$$

从代数的角度看，化标准形的过程就是通过变量的坐标变换化简一个二次齐次多项式。

我们下面推广坐标旋转变换的概念。

定义2　设变量x_1，x_2，…，x_n能用变量y_1，y_2，…，y_n表示为

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (*)$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

*式称为从变量y_1，y_2，…，y_n到变量x_1，x_2，…，x_n的线性变换，其中c_{ij}为常数（i，j=1，2，…，n）。矩阵 C称为从变量y_1，y_2，…，y_n到变量x_1，x_2，…，x_n的过渡矩阵。

当C为正交矩阵时，（*）称为正交变换，如坐标旋转变换就是正交变换。

对于实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x'Ax$$

如果作正交变换 ***x*=C*y*,** 则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x'Ax$$

$$= (Cy)'ACy = y'C'ACy$$

其中**C′AC**仍是对称阵，***y*′(C′AC)*y***是

y_1，y_2，…，y_n的一个二次型。

因此我们只要找到正交矩阵C
（即$C'=C^{-1}$），使得$C'AC$为对角阵，
则 f 就化为只含有y_1，y_2，…，y_n平方项而没有y_1，y_2，…，y_n交叉相乘的项。称此
y_1，y_2，…，y_n的二次型为 f 的标准形。