2 第二章: 矩阵及其运算

复习要求

1. 矩阵的概念. 知道零矩阵, 行矩阵(行向量), 列矩阵(列向量), 对角矩阵, 单位矩阵, 对称矩阵等.

2. 矩阵的线性运算(加法和数乘), 矩阵的乘法运算, 矩阵的转置, 方阵的行列式以及它们的运算规律. 例如:

(a) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(b) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$;

(c) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$;

(d) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$;

(e) $\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

(f) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}, (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$;

(g) $\boldsymbol{E}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$;

(h) 矩阵的乘法一般不满足交换律; 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$;

(i) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

(j) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(k) $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$;

(l) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$; $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$.

3. 方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

4. 逆矩阵的定义: n阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$. $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$. 逆矩阵可逆的充要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$

5. 逆矩阵的性质: $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}, (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

6. 分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中$A_i(i = 1, 2, \ldots, s)$都是方阵, 分块对角矩阵的行列式具有性质$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

例题1 已知n阶方阵A满足$A^2=A$, 求$(A+E)^{-1}$

解

$$A^2=A \implies (A+E)(A-2E)=-2E$$

$$\implies (A+E)(-\frac{1}{2}(A-2E))=E$$

$$\text{由可逆定义} \implies (A+E)^{-1}=-\frac{1}{2}(A-2E).$$

例题2 设n阶方阵满足$A^2+A-4E=O$, 求$(A-E)^{-1}$.

解

$$A^2+A-4E=O \implies (A+2E)(A-E)=2E$$

$$\implies (\frac{1}{2}A+E)(A-E)=E$$

$$\text{由可逆定义} \implies (A-E)^{-1}=\frac{1}{2}A+E.$$

P.67-68 课后习题 9, 10, ,11, 15, 16, 17.

本章关键是求逆矩阵.

方法一: 用伴随矩阵求$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$. 参考P.56例10.

方法二: 用初等变换求$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\overset{\text{初等行变换}}{\sim}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$. 参考P.90例8.

判断一个矩阵是可逆有很多方法:

n阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆

$\Longleftrightarrow$存在n阶矩阵$\boldsymbol{B}$, 使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$. (定义)

$\Longleftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$为非奇异矩阵.

$\Longleftrightarrow$ 它的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$是可逆矩阵.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$的行阶梯形矩阵有$n$个非零行.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{E}_n$($\boldsymbol{A}$可经过初等变换化成标准形$\boldsymbol{E}_n$).

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})=n$ ($\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$是满秩矩阵).

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$是若干个初等方阵之积.

$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解.

$\Longleftrightarrow$ 非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$只有唯一解.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$的(行)列向量组线性无关.

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$的$n$个特征值均非零.