1 第一章：行 列 式

复习要求

1. 对角线法计算二阶和三阶行列式. 上(下)三角行列式, 对角行列式.
2. 会求排列的逆序数(P.7, 例4);
3. 理解n阶行列式的定义. $D = |\boldsymbol{A}| = \det(a_{ij}) = \sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$
4. 熟练掌握行列式的性质, 用行列式的性质计算行列式.
   (a) $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$
   (b) $D \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} -D$, $D \xlongequal{c_i \leftrightarrow c_j} -D$.
   (c) 若$D \xrightarrow{k \times r_i} \widetilde{D}$, 则$\widetilde{D} = kD$
   (d) 行列式中若有两行(列)完全相同或成比例, 则此行列式为零.
   (e) 行列式某一行(列)各元素均为两项之和, 则此行列式可以拆成两个行列式之和.
   (f) $D \xlongequal{r_i + kr_j} D'$, $D \xlongequal{c_i + cr_j} D'$
5. 熟练掌握利用行列式按行(列)展开的方法计算行列式. 主要方法: 按某行(列)展开, 就可以把行列式降一阶, 然后形成递推关系式或者直接得到结果.
6. 升阶法和范德蒙德行列式不作要求.

例题1: 用对角线法则计算3阶行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$(见课本P.4 例2)

例题2: 求排列3 2 5 1 4的逆序数. (见课本P.7 例4)

例题3: 计算行列式$D = \begin{vmatrix} x & x & -4 \\ -2 & x & 1 \\ -3 & 4 & x \end{vmatrix}$中$x^2$的系数?

解: 由行列式定义每项只能取不同行,不同列的元素. 肯定要取两个不同行不同列的x和一个常数. 显然只能取红色位置, 所以$(-1)^t a_{12}a_{21}a_{33} = 2x^2$

重点复习P.33-35 课后习题$2, 3, 5(5), 7(2)(4)(6)$.

课后题5(5) 证：递推法，按第1列展开，建立递推关系式，有

$$D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

课后题7(2) 证：利用各列元素之和相同，提出公因式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - ar_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

课后题7(6) 证: 先分解行列式再用递推法

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1+0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + a_n D_{n-1} \\
&= a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_n D_{n-1}
\end{aligned}
$$

例题4 计算$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

解 从第2行开始，每行$\times(-1)$，加到前一行，然后令右下角的$1=(1-x)+x$，将行列式表示为两个行列式之和，得

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & 1-x \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} = (1-x)^n + \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -x & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & -x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)^n-(-1)^{n-1}x^n=(-1)^n[(x-1)^n-x^n]
\end{aligned}
$$