2 §2 矩阵的运算

例 9 由行列式$|A| = \det(a_{ij})$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵A的伴随矩阵。试证$AA^* = A^*A = |A|E$.

证 $A = (a_{ij})$, 记$AA^* = (b_{ij})$, 则

$$b_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & \text{当 } i = j; \text{ (行列式按行展开的公式)} \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \text{ (P.26 推论)} \end{cases}$$

所以$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$

类似，记$A^*A = (c_{ij})$, 则

$$c_{ij} = (A_{1i}, A_{2i}, \ldots, a_{ni}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = \begin{cases} |A|, & \text{当 } i = j; \text{（行列式按列展开的公式）} \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \text{ (P.26 推论)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$$

六、共轭矩阵

当$A=(a_{ij})$为复矩阵时，用$\overline{a}_{ij}$表示a_{ij}的共轭复数（$a+bi$与$a-bi$共轭），记$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$. $\overline{A}$ 称为A的共轭矩阵.

设A、B为复矩阵，λ为复数，共轭矩阵有下列运算规律:

(i) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(ii) $\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\bar{A}$;

(iii) $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$.

3 §3 逆矩阵

给定一个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

记系数矩阵为A，A为n阶方阵，记$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，则有$Y = AX$.

按Cramer法则，若$|A| \neq 0$，则

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & y_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

按红色那列展开，有

$$= \frac{1}{|A|}(A_{1i} \cdot y_1 + A_{2i} \cdot y_2 + \cdots A_{ni} \cdot y_n)$$

即$x_1, x_2, \cdots, x_n$可用$y_1, y_2, \cdots, y_n$线性表示

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases} \tag{2}$$

其中$b_{ij} = \frac{1}{|A|}A_{ij}$。由第一章定理4解的唯一性知（$\because |A| \neq 0$），这个表示式是唯一的。（2）是从$y_1, y_2, \cdots, y_n$到$x_1, x_2, \cdots, x_n$的线性变换,线性变换（2）称为线性变换（1）的逆变换。

令B为（2）所对应的系数矩阵，则（2）可写成$X = BY$.

将$X = BY$代入$Y = AX \Longrightarrow Y = A(BY) \Longrightarrow Y = (AB)Y$ (乘法的结合率); $\Longrightarrow$ Y经系数矩阵AB的线性变换又变会自身，AB为恒等变换所对应的矩阵，我们知道恒等变换对应的矩阵为单位矩阵E，故$AB = E$。

将$Y = AX$代入$X = BY \Longrightarrow X = B(AX) = (BA)X \Longrightarrow BA = E$

定义7 对于一个n阶方阵A，若有一个n阶方阵B使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵。

性质 矩阵A可逆$\Longrightarrow$ A的逆矩阵唯一。

证： 反证，若不唯一，设B, C均为A的逆矩阵，从而$AC = E, BA = E$，有

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C,$$

所以$B = C$. $\square$

A的逆矩阵一般记作A^{-1}，即在定义中$B = A^{-1}$，有$AA^{-1} = A^{-1}A = E$。

定理1 矩阵A可逆$\Longrightarrow |A| \neq 0.$

证： A可逆$\Longrightarrow AA^{-1} = E \Longrightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1 \neq 0$ (由上节方阵的行列式性质（iii）得). 从而由$|A| \cdot |A^{-1}| \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0.$ $\square$

定理2 $|A| \neq 0 \Longrightarrow$ 矩阵A可逆，且$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*}$，其中$A^*$为矩阵$A$的伴随矩阵。

证： 上节例9知$AA^* = A^*A = |A|E$. 又$\because |A| \neq 0$

$\therefore A\frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{|A|}A^*A = E$ (都除以$|A|$,然后矩阵乘法运算规律(ii)). 由矩阵定义有$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. $\square$

从前面的线形变换(1)的逆变换(2)也能看出

$$A^{-1} = B = (b_{ij}) = (\frac{1}{|A|}A_{ji}) = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) = \frac{1}{|A|}A^*.$$

定义： 当$|A| = 0$时，A称为**奇异矩阵(Singular Matrix)**，当$|A| \neq 0$时，A称为**非奇异矩阵(Nonsingular Matrix)**。

定理1和定理2结合有：A是可逆矩阵的充要条件是$|A| \neq 0$. 或说A是可逆矩阵的充要条件是A是非奇异矩阵。

推论 对于同阶方阵A和B，若$AB = E$ (或$BA = E$), 则$B = A^{-1}$.

证 $AB = E \Longrightarrow |A| \cdot |B| = |E| = 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow A^{-1}$存在. 于是$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$. □

实数域R	n阶实矩阵集合
实数a 可逆$\Leftrightarrow \exists b$ 使$ab = ba = 1$ $\Leftrightarrow a \neq 0$ $\Rightarrow b = a^{-1}$	矩阵A可逆$\Leftrightarrow \exists B$, 使$AB = BA = E_n$ $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ $\Rightarrow B = A^{-1}$

小结论： 若A可逆，则$|A^*| = |A|^{n-1}$.

证 A可逆$\Longrightarrow AA^* = A^*A = |A|E \Longrightarrow |AA^*| = ||A|E| \Longrightarrow |A| \cdot |A^*| = |A|^n|E| = |A|^n \Longrightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$. □

方阵的逆矩阵满足下列运算规律:

(i) 若A可逆，则A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$.

由逆矩阵的唯一性知$AA^{-1} = E \Longrightarrow A^{-1}$ 的逆矩阵必为A. A与A^{-1}互为逆矩阵。

(ii) 若A可逆，数$\lambda \neq 0$, 则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

证 因为$|A| \neq 0, \lambda \neq 0$, 所以$|\lambda A| = \lambda^n |A| \neq 0 \Longrightarrow \lambda A$ 可逆。
$(\lambda A)^{-1}(\lambda A) = E \Longrightarrow \lambda(\lambda A)^{-1}A = E \Longrightarrow (\lambda A)^{-1}A = \frac{1}{\lambda}E \Longrightarrow (\lambda A)^{-1}AA^{-1} = \frac{1}{\lambda}EA^{-1} \Longrightarrow (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(iii) 若A和B为同阶方阵且均可逆，则AB也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E \Longrightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

注：依次类推，$A_1, A_2, \ldots A_n$ 均可逆，则有$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(iv) 若A可逆，则A^{T}亦可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

证 $A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E \Longrightarrow (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. □

当$|A| \neq 0$时，对于方阵A, 还可以定义$A^0 = E$, $A^{-k} = (A^{-1})^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. 因此，当$|A| \neq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$时(上节定义为正整数，这一节用逆矩阵推广所有的整数), 有

$$\boxed{A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}} \quad \boxed{(A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}}$$

例：$A^4A^{-2} = A^2$, 其实$A^4A^{-2} = AAAAA^{-1}A^{-1} = AAA(AA^{-1})A^{-1} = AA(AA^{-1}) = AA = A^2$.

例10 求方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 所以$A^{-1}$存在. 再计算伴随矩阵

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6$; $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$; $A_{12} = -3$; $A_{22} = -6$; $A_{32} = 5$; $A_{13} = 2$; $A_{23} = 2$; $A_{33} = -2$;

得伴随矩阵$A=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$, 所以$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

$\square$

例11 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$, 求满足$AXB=C$的矩阵$X$.

解 若A^{-1}, B^{-1}存在, 则用A^{-1}左乘B^{-1}右乘上式,有$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}\Longrightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$.

$|A|=2\neq 0$(上例), $|B|=1\neq 0\Longrightarrow A$和$B$均可逆.

$$X=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.$$ $\square$

例题增补

例1(增) 已知n阶方阵A满足$A^2 = A$, 证明$A+E$是可逆矩阵.

证

$$
\begin{aligned}
A^2 = A &\implies (A+E)(A-2E) = -2E \\
&\implies (A+E)(-\frac{1}{2}(A-2E)) = E \\
\text{由可逆定义} &\implies (A+E)^{-1} = -\frac{1}{2}(A-2E)
\end{aligned}
$$

. □

例2(增) 设n阶方阵满足$A^2 + A - 4E = O$, 求$(A-E)$的逆矩阵.

证

$$
\begin{aligned}
A^2 + A - 4E = O &\implies (A+2E)(A-E) = 2E \\
&\implies (\frac{1}{2}A+E)(A-E) = E \\
\text{由可逆定义} &\implies (A-E)^{-1} = \frac{1}{2}A+E
\end{aligned}
$$

. □

注: 上面两个例题类似于多项式因式分解. $A^2 = A$ 相当于$x^2 - x = 0$, 进而分解为$(x+1)(x-2) = -2$. $A^2 + A - 4E = O$相当于$x^2 + x - 4 = 0$, 进而分解为$(x-1)(x+2) = 2$.

例3(增) 设n阶方阵A, B及$A+B$均可逆, 证明$A^{-1}+B^{-1}$也可逆, 且求其逆矩阵.

分析 再用例1,2的方法不行了, 可以利用$A^{-1}+B^{-1}$化成A, B及$A+B$的积的形式, "和化积", 再由本节性质(iii)推出结论.

证

$$\begin{aligned} A^{-1}+B^{-1} &= A^{-1}E+EB^{-1} \\ &= A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1} \\ &= A^{-1}(B+A)B^{-1} \\ &= A^{-1}(A+B)B^{-1}. \end{aligned}$$

上式为三个可逆矩阵的乘积，故$A^{-1}+B^{-1}$可逆。

$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1}=(B^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$ □

例4(增) 设n阶矩阵A非奇异$(n \geq 2)$, 求$(A^*)^*$.

解 前面我们求过$|A^*| = |A|^{n-1}$. 而由$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A^*|}(A^*)^*$知，$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} \underline{\underline{\underline{\text{逆矩阵运算规律(ii)}}}} |A|^{n-1}\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2}A.$ □

例5(增) 设3阶方阵A和B满足$AB + E = A^2 + B$, 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 求$B$.

解 $AB + E = A^2 + B$，合并含有未知矩阵B的项，得

$$(A - E)B = A^2 - E = (A - E)(A + E).$$

又，$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其行列式$\det(A - E) = -1 \neq 0$, 故$A - E$可逆，

用$(A - E)^{-1}$左乘上式两边，即得$B = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □