3 第三章:初等变换与线性方程组

复习要求

1. 熟练掌握矩阵的初等变换, $(r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + kr_j)$
别把矩阵初等变换与行列式的化简混淆. 初等变换可逆. 矩阵等价的概念.

2. 熟练化简矩阵为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

行阶梯形	行最简形
1. 求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})$;(P.78 例2)	1. 求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})$;
2.求$\boldsymbol{A}$的列向量组的最大无关组(P.106例5);	2.求$\boldsymbol{A}$的列向量组的最大无关组;
3.求$R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$看$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是否有解;(P.83 例5)	3.求$\boldsymbol{A}$的列向量组的线性关系(P.106例5);
	4.求解线性方程组, 求基础解系;
	5.证明两个矩阵或向量组等价;(P.110 例7证二)
	6.求$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E})$的行最简形可得$\boldsymbol{A}^{-1}$ (P.90例8);

3. 矩阵的秩的概念: 最高阶非零子式的阶数; 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩, 等价的矩阵有相同的秩; 结合向量组的秩记忆:最大无关组所含向量的个数. 矩阵的秩等于行向量组的秩也等于列向量组的秩.

4. 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件和非齐次线性方程组有解的充要条件(P.81定理2和定理3).会求方程组的通解. 会熟练讨论方程组什么时候有零解,唯一解,无解, 无穷解等条件. (P.85例7)

5. 会用初等行变换求逆矩阵和求$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. (P.90例8,P.91例9)

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) \widetilde{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

6. 重点看一下课后习题P.93-94的$6 \sim 12$.

例如P.94课后题10: 解: 系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+4r_3]{r_1+2r_3} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

所以当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq 10$时, 方程组有唯一解.

当$\lambda = 1$时, 增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

此时增广矩阵的秩=系数矩阵的秩$=1$, 有无穷多解, 解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R$$

当$\lambda = 10$时, $\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

此时增广矩阵的秩≠系数矩阵的秩, 故无解.