4 第四章:向量组的线性相关性

复习要求

1. 理解向量的概念. 向量组的概念. 向量组的线性表示. 向量的线性相关与线性无关的定义. 向量组等价的定义.
给定向量组A : $a_1, a_2, \ldots, a_m$. 和向量组B : $b_1, b_2, \ldots, b_s$. 令矩阵$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$, 矩阵$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s)$.

向量b由向量组A线性表示	存在一组数$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使 $b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m$	$\Leftrightarrow$非齐次方程组$\boldsymbol{A}x = b$有解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, b)$ (P.98定理1)
向量组A线性相关	存在**不全为零**的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0$	$\Leftrightarrow$齐次方程组$\boldsymbol{A}x = 0$有非零解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) < m$ (P.101定理2)
向量组A线性无关	只有$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$,才使 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0$	$\Leftrightarrow$齐次方程组$\boldsymbol{A}x = 0$只有零解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = m$ (P.101定理2)
向量组A可由向量组B线性表示	A组的每个向量都能由B线性表示	$\Leftrightarrow$ 存在$s \times m$矩阵$\boldsymbol{K}$,满足 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \Rightarrow R(A) \leqslant R(B)$
向量组A与向量组B等价	A组与B组能相互线性表示	$\Rightarrow R(A) = R(B)$

2. 记住向量组线性相关性的有关结论: (a). 向量组线性相关$\Leftrightarrow$向量组中至少有一个向量可由其余的向量线性表示; (b). 向量组部分相关则整体相关, 反过来, 若整体无关, 则部分无关; (c). 线性无关的向量组的每个向量后添上一个分量仍无关; (d). m个n维的向量组,当$m > n$必定线性相关. (P.103定理3)

3. 向量组的最大无关组与向量组的秩. 具体性质见上页表格. 再有

   (a) $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

   (b) 向量组与它的最大无关组等价.

   (c) 两个向量组等价当且仅当它们的最大无关组等价.

   (d) 若两个向量组A和B均是某个向量组的最大无关组, 那这A组和B组等价.

4. 会证明向量组线性无关(P.102例3); 会判别向量组的线性相关性(P.102例2); 会用初等变换求向量组的秩和它的极大无关组(P.106例5); 会证明两个向量组等价(P.107例7).

5. 会验证一个集合是否为向量空间: 只需验证加法和数乘封闭. 了解向量空间基和维数的概念.

6. 知道n元齐次线性方程组的解空间S的维数与系数矩阵的秩r的关系: $\dim S = n - r$. 会求齐次方程组的基础解系和通解. 知道非齐次方程组的通解的结构: 一个特解加上对应的齐次方程组的通解. (P.121课本例14和P.125例16)

7. P.128课后习题重点看一下:4, 5, 6, 7, 12, 13, 17, 21, 23, 24, 25

例题1: 单项选择题: 设$a_1, a_2, \cdots, a_m$是m个n维向量, 则下述论断正确的是(   )

(A) 若$\boldsymbol{a}_m$不能由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{m-1}$线性表示, 则向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性无关;

(B) 若$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性相关, 则任一向量都可由其余向量线性表示;

(C) 存在一组全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$, 则$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性无关;

(D) 当$m > n$时, 向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$必线性相关.

例题2:填空题 3元齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +4x_4 = 0 \\ x_1 & +5x_2 & +7x_3 = 0 \end{cases}$解空间的维数为______.

解: 系数矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$经行初等行变换化为行阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 知系数矩阵的秩为$r = 2$, 所以解空间的维数$dim = n - r = 3 - 2 = 1$.
答案为1.

例题3: 证明题 向量组$B: \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$能由向量组$A: \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性表示，其系数矩阵$\boldsymbol{K}$为$n$阶可逆矩阵. 即$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{K}$.

证明: 向量组B线性无关$\Longleftrightarrow$ 向量组A线性无关.

证: 因为$\boldsymbol{K}$可逆, 所以有$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{K}^{-1}$, 因此向量组$A$也能由向量组$B$线性表示, 因此向量组$A$与$B$等价. 因为等价的向量组秩相等(P.108推论1), $R(A) = R(B)$, 所以若A线性无关, 即$R(A) = m$, 则$R(B) = m$, 即B也线性无关. 反之亦然.

例题4: 填空题 已知向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的乘积: $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 1, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$,

则$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^{100} = $_____.