5 第五章:相似矩阵与二次型

1. 了解向量的内积, 向量的长度, 规范正交基与正交矩阵等概念.

2. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念. 熟练掌握求矩阵的特征值和特征向量.
   方法: 先求特征方程$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$的解得$n$个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(重数照算), 对应每个特征值$\lambda_i$的特征向量是$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的非零通解.

3. 了解相似矩阵的概念, 相似矩阵对应特征多项式和特征值相同. 若n阶方阵与对角矩阵相似, 则对角矩阵的对角元是该方阵的特征值.

4. 矩阵对角化的条件. 实对称矩阵必可相似对角化.可找到正交矩阵$\boldsymbol{P}$, 使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵, 对角元为$\boldsymbol{A}$特征值(课本定理8).

5. 掌握二次型及其矩阵表示. 给定二次型会写出它的矩阵. 了解定理10, 二次型可以通过正交变换化成标准形, 标准形的系数为二次型矩阵的特征值. 会用配方法化二次型为标准形.

6. 会判断二次型和对称矩阵的正定性. (例13); 会用定义证明矩阵的正定性.

7. 重点看一下P.162课后习题4, 5, 7, , 11, 14, 15.

例题1: 选择题 若矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$为正定矩阵, 则$k$的值为(　　).

$$(A)\ k < 2;\ (B)\ k > 2;\ (C)\ k < -2;\ (D)\ k > -2.$$

答案为(B).

例题2: 选择题 设四阶矩阵A的行列式值为24, A特征值中有三个为$1, 2, 3$, 则最后一个特征值为(　　).

$$(A)\ 1;\ (B)\ 2;\ (C)\ 3;\ (D)\ 4.$$

答案为(D).

例题3: 填空题 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$的正定性为____.

写出二次型的矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 看顺序主子式$a_{11} = 1 > 0$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 2 > 0$, $|A| = 2 > 0$. 所以应填正定.

例题4:矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$与矩阵$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似, 则$y =$ ________.