6 期末考试模拟试题

客观题

一. 单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 下列矩阵运算错误的是(   )

(A). $AA^* = A^*A$; (B). $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(C). $|kA| = k|A|$; (D). $(A+B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}$;

2. $D_4(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x \\ x & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 的最高次项是(   )

(A). $6x^6$; (B). $-6x^6$; (C). $6x^8$; (D). $-6x^8$;

3. 设A是$m \times n$矩阵, $m < n$, 其秩$R(A) = m$, 则下面描述正确的是(   )

(A). 齐次线性方程组$Ax = 0$只有零解;

(B). 非齐次线性方程组$Ax = b$一定无穷多解;

(C). A的列向量组线性无关;

(D). A的行向量组线性相关;

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$相似, 则$x=$(　　)

(A). 1;　(B). 2;　(C). 3;　(D). 4;

5. 3元线性方程组$\begin{cases}x_1 & & +2x_3=0\\ x_1 & +2x_2 & +4x_4=0\\ x_1 & +5x_2 & +7x_3=0\end{cases}$解空间的维数为(　　)

(A). 1;　(B). 2;　(C). 3;　(D). 4;

二. 填空题(每小题3分,共15分)

1. 设4阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2, 则其伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的秩是_____;

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\t\\3\end{pmatrix}$两两正交, 则$t=$ _____;

3. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$, 其中$a_i\neq 0, b_i\neq 0, i=1,2,3$, 则矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})=$ _____;

4. 规定由小到大为标准次序, 则排列5 4 3 2 1 6的逆序数为_____;

5. 二次型$5x^2+6y^2+4z^2-4xy-4xz$的正定性是________;

主观题

三. 计算n阶行列式(本题10分)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & & & & \\ & -1 & x & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & x & \\ & & & & -1 & x \end{vmatrix} \quad (\text{未标明的元素均为}0)$$

四. 求逆矩阵(本题10分)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

五.(本题12分) 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求$A$的特征值和特征向量.

六.(本题12分) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \\ b \end{pmatrix}$$

(1). 问a, b取何值时, β不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示?

(2). 问a, b取何值时, β能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示? 并写出表示式;

(3). 问a, b取何值时, β能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式不唯一? 并写出一般表示式.

七. (本题10分)向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_m$能由向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_m$线性表示，其系数矩阵K为n阶可逆矩阵. 即$(b_1, b_2, \cdots, b_m) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)K$.

证明: 向量组B线性无关$\Longleftrightarrow$ 向量组A线性无关.

八. (本题16分) 设A, B均为n阶对称矩阵, 且A非奇异; 试证明:

(1). BAB是对称矩阵; (4分)

(2). $AB+BA$是对称矩阵; (3分)

(3). AB是对称矩阵当且仅当$AB=BA$; (4分)

(4). 二次型$f=x^{\mathrm{T}}A^2x$ 为正定二次型. (5分)