7 模拟试题参考答案

客观题

一. 单项选择题(每小题3分,共15分)

1. (C).

2. (A). (最高次项取$(-1)^t a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = (-1)^5 x \cdot 2x^2 \cdot 3x^3 \cdot (-1) = 6x^6$);

3. (B).

4. (C).($|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$解出$\boldsymbol{A}$的特征值分别为2和3 , $\boldsymbol{A}$与对角矩阵相似, 对角线必为$\boldsymbol{A}$的特征值,故$x = 3$)

5. (A). (3元齐次线性方程组的系数矩阵化成行阶梯形矩阵后发现秩为2, 故解空间的维数$= 3 - 2 = 1$)

二. 填空题(每小题3分,共15分)

1. 0, (因为$\boldsymbol{A}$的秩为2, 它的任一3阶子式均为0, 所以矩阵$\boldsymbol{A}$的所有代数余子式也全为0);

2. -5, ($\because \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3 = 1 + 2t + 9 = 0 \therefore t = -5$)

3. ($\because \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1, b_2, b_3) \therefore R(\boldsymbol{A}) \leqslant R\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$)

4. 10

5. 正定; ($\because$ $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 其一阶主子式$=5>0$, 二阶主子式$=26>0$, 三阶主子式$=80$)

主观题

三. 计算n阶行列式(本题10分)

解: 方法一: 从第二列开始, 依次将前一列乘以x加到后一列,得

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2+x & 3+x(2+x) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} ix^{n-i} \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & -1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

再按最后一列展开得$D_n = (-1)^{n-1}(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} ix^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} ix^{n-i}$

方法二: 递推法, 按最后一列展看$D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n-1}n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + n$

四. 求逆矩阵(本题10分)

$$解:\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}_1=(5)\Rightarrow \boldsymbol{A}_1^{-1}=\frac{1}{5};$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},\text{由}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{E})\sim(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}_2^{-1})\text{计算得}\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

五. 答案见课本P.142例7

六. 解:

记矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则有

$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示$\Leftrightarrow$ 非齐次方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有解

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&1&-1\\1&a&1&6\\0&2&1&b\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&1&-1\\0&a+2&0&0\\0&0&0&b+1\end{array}\right)$$

(1). 当$b\neq-1$时, $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$, 即$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示;

(2). 当$b=-1$ 且$a\neq-2$时,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$,即$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示;

解$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$得唯一解$\boldsymbol{x}=(7,0,1)^{\mathrm{T}}$, 故表示式为$\boldsymbol{\beta}=7\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$;

(3). 当$b=-1$ 且$a=-2$时, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$, 方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解, 其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-4k\\-k\\2k-1\end{pmatrix},k\in R$$

于是$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示的一般表达式是

$$\boldsymbol{\beta}=(7-4k)\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2+(2k-1)\boldsymbol{\alpha}_3,\ \ k\in R.$$

七. 证明: 因为$\boldsymbol{K}$可逆, 所以有$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{K}^{-1}$, 因此向量组$A$也能由向量组$B$线性表示, 因此向量组$A$与$B$等价. 因为等价的向量组秩相等(P.108推论1), $R(A) = R(B)$, 所以若A线性无关, 即$R(A) = m$, 则$R(B) = m$, 即B也线性无关. 反之亦然.

八. 证明:

(1). $(\boldsymbol{BAB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BAB}$

(2). $(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}$

(3). $\boldsymbol{AB}$是对称矩阵$\Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

(4). $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$, 就有$\boldsymbol{Ax} \neq 0$ (反证: 若$\boldsymbol{Ax} = 0$, 但因为$\boldsymbol{A}$可逆, 所以方程$\boldsymbol{Ax} = 0$只有零解, 这与$\boldsymbol{x} \neq 0$矛盾).

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = [\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}] = \|\boldsymbol{Ax}\|^2 > 0$$

因此f为正定二次型.